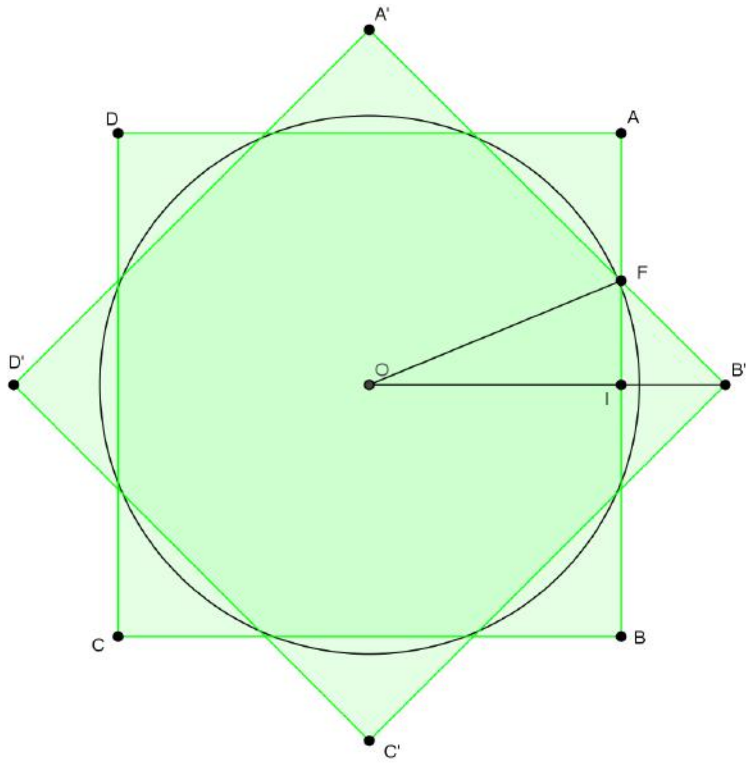
Table et nappes

Les organisateurs du banquet disposent de tables rondes de 150 cm de diamètre.
Ils ont fait faire des nappes carrées pour les recouvrir.
Mais suite à une erreur de mesure ces nappes ne font que 140 cm de côté.
Peuvent-ils avec deux nappes recouvrir complètement une table ?

1) Cherchons d'abord des solutions où les deux nappes carrées ABCD et A'B'C'D' ont toutes les deux le même centre O que la table.
Pour que leur partie commune recouvre une partie maximale de la table, disposons-les de façon qu'elles fassent entre elles un angle de $\frac{\pi}{4}$ rad.



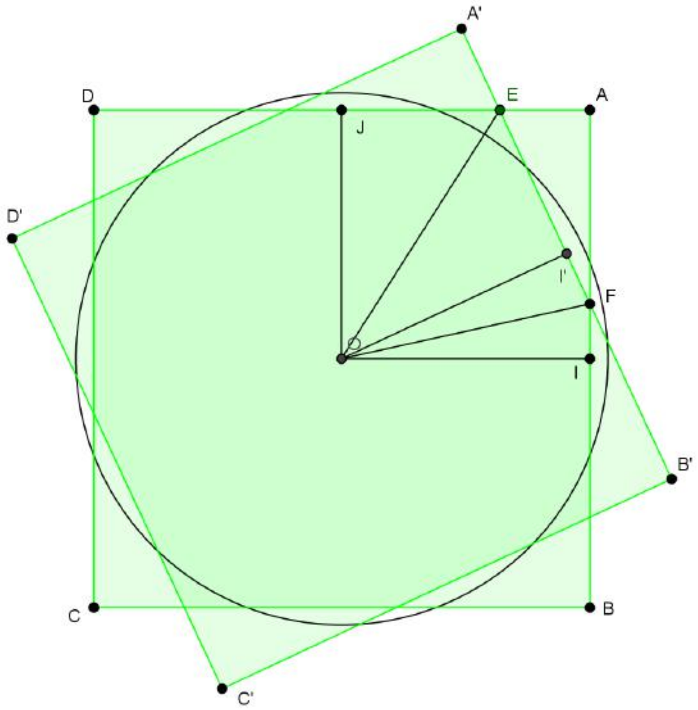
Les huit points d'intersection des deux carrés sont alors situés à la même distance de O.
Calculons cette distance.

Soit F le point d'intersection de [AB] et [A'B'], et I le milieu de [AB].
$OF^2 = OI^2 + IF^2 = OI^2 + IB'^2 = OI^2 + (OB' - OI)^2 = 70^2 + (70\sqrt{2} - 70)^2 = 70^2(4 - 2\sqrt{2})$.
Donc $OF = 70\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \approx 75{,}8$. (1)
Cette valeur étant supérieure à 75, la table est entièrement recouverte.

Remarque : un petit exercice pourrait être d'effectuer cette comparaison sans passer par des valeurs approchées. Comparer $70\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ à 75 revient à comparer $14\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ à 15, soit $196(4 - 2\sqrt{2})$ à 225, soit 559 à $392\sqrt{2}$, c'est-à-dire 312 481 à 307 328.

L'angle des deux carrés est-il nécessairement de $\frac{\pi}{4}$ rad ?

Supposons que A'B'C'D' soit l'image de ABCD par la rotation de centre O et d'angle α (en radians). Compte tenu des symétries de la figure, on peut limiter α à varier entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ (ou même entre 0 et $\frac{\pi}{4}$).



Notons I le milieu de [AB], I' le milieu de [A'B'], J le milieu de [AD].
Soit F le point d'intersection de [AB] et [A'B'], E le point d'intersection de [AD] et [A'B'].

$\widehat{IOI'} = \alpha$. Or les triangles rectangles IOF et I'OF sont isométriques, donc $\widehat{IOF} = \widehat{FOI'} = \frac{\alpha}{2}$.
On en déduit $OF = \frac{OI}{cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{70}{cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$.

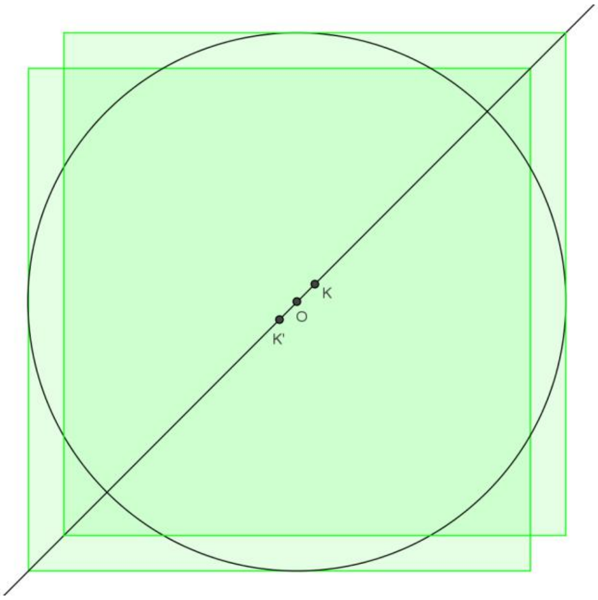
$\widehat{I'OJ} = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Or les triangles rectangles I'OE et JOE sont isométriques, donc $\widehat{I'OE} = \widehat{EOJ} = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$.
On en déduit $OE = \frac{OJ}{cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{70}{cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$.

Pour que les deux nappes recouvrent la table (ce qui n'est pas le cas dans la figure ci-dessus), il faut et suffit que F et E soient tous les deux à l'extérieur du cercle de centre O et de rayon 75, c'est-à-dire que OF ≥ 75 et OE ≥ 75. Autrement dit, que $cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leq \frac{14}{15}$ et $cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \leq \frac{14}{15}$.
Posons $\beta = arccos\left(\frac{14}{15}\right)$: $\beta \approx 0{,}3672\ rad \approx 21{,}04°$.
La double condition équivaut à $\frac{\alpha}{2} \geq \beta$ et $\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \geq \beta$, c'est-à-dire $2\beta \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} - 2\beta$.
Cette condition est réalisable à condition que $2\beta \leq \frac{\pi}{2} - 2\beta$, c'est-à-dire $\beta \leq \frac{\pi}{8}$.
C'est bien le cas, puisque 21,04° < 22,5°.
D'ailleurs $\cos(\beta) = \frac{14}{15} \approx 0{,}933$ et $cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \approx 0{,}924$.
Ainsi, les angles α de 43°, 44°, 45°, 46°, 47° conviennent, mais 42° ou 48° ne conviennent pas.

Remarque : comparer $\frac{14}{15}$ et $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ équivaut à comparer leurs inverses $\frac{15}{14}$ et $\sqrt{4-2\sqrt{2}}$: c'est ce qu'on a fait plus haut.

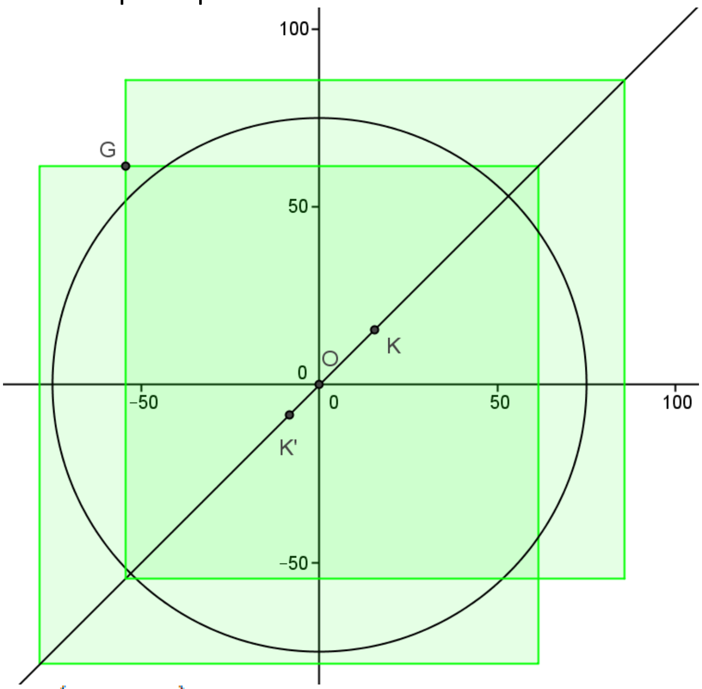
2) Cherchons maintenant des solutions où les deux carrés ont une diagonale commune passant par le centre O de la table. Appelons K et K' les centres des deux carrés, alignés avec O et nécessairement de part et d'autre de O. Posons OK = k et OK' = k'.

- Dans la position (1) ci-dessous où les nappes sont le plus proche possible, chaque carré a deux côtés tangents au cercle :



Alors k = k' = $5\sqrt{2} \approx 7$.

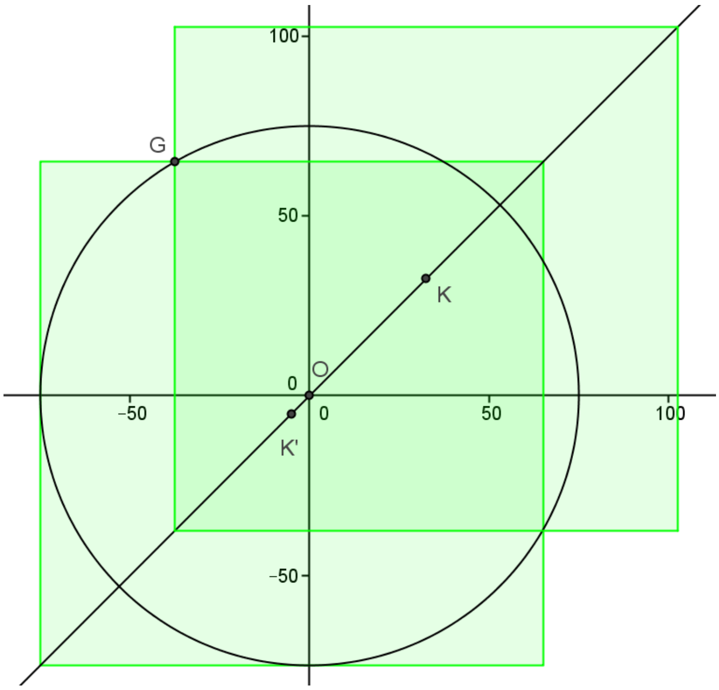
On peut alors les éloigner tant que le point G ci-dessous reste extérieur au disque :



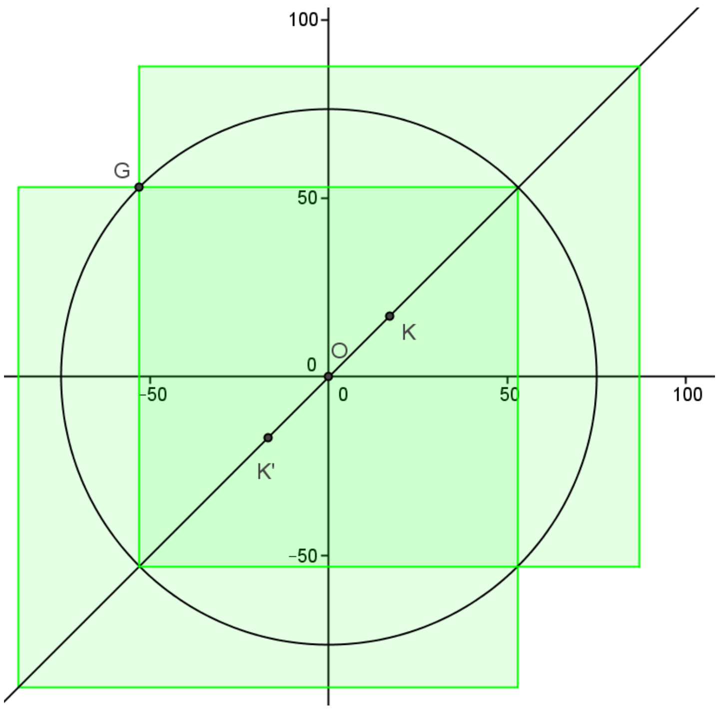
Or G a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{k}{\sqrt{2}} - 70 \\ \frac{-k'}{\sqrt{2}} + 70 \end{pmatrix}$.

Donc il y a recouvrement si et seulement si $\left(\frac{k}{\sqrt{2}} - 70\right)^2 + \left(\frac{k'}{\sqrt{2}} - 70\right)^2 \geq 75^2$.

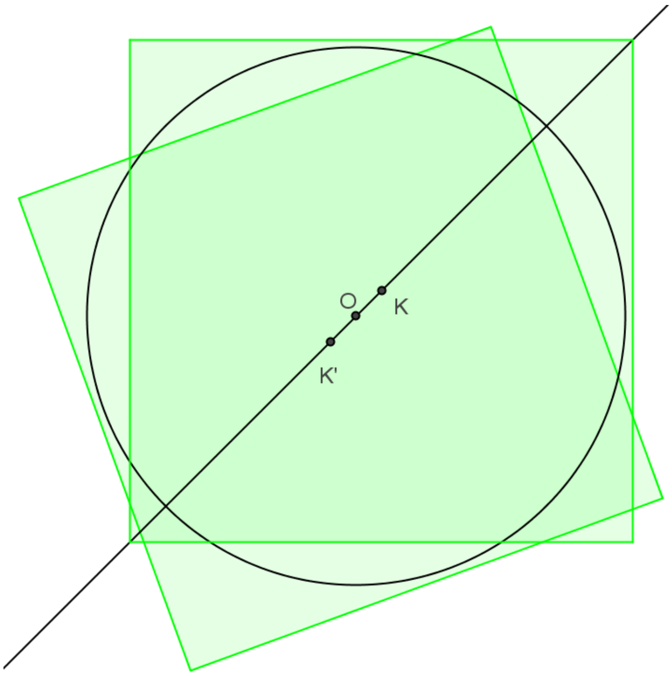
- Par exemple, si le carré du bas reste dans la position (1), c'est-à-dire k' = $5\sqrt{2}$, on peut éloigner K de O jusqu'à ce que $\mathrm{k} = 70\sqrt{2} - 20\sqrt{7} \approx 46$:



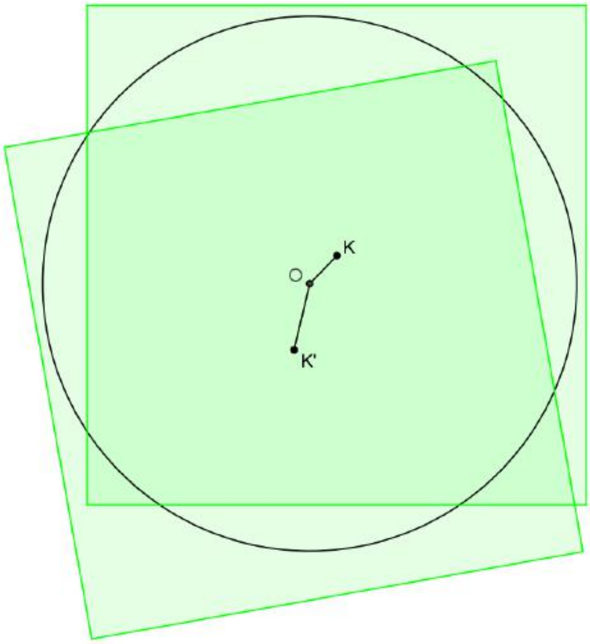
- On peut aussi tirer les deux nappes symétriquement par rapport à O : alors k = k', et leur valeur commune maximale est $70\sqrt{2} - 75 \approx 24$:



3) Il y a une quantité d'autres dispositions possibles, par exemple celle-ci, où K et K' sont symétriques par rapport à O, avec OK = OK' = 10, le carré du bas ayant tourné de 20° autour de son centre K' :



Il n'est même pas nécessaire que K et K' soient alignés avec O : ci-dessous OK = 11, OK' = 19, $\widehat{KOK'} = 150°$, et le carré du bas a tourné de 10° autour de son centre K'.



Une étude exhaustive de toutes les solutions ne justifierait plus la mention "pour nos élèves" …