▪ Voici la solution de Bernard Collignon.
On remarque tout d'abord que cette somme est définie si et seulement si $ab \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $a \neq 0$ et $b \neq 0$.
Pour $ab \neq 0$, on peut écrire :

$$S_n = 1 + \frac{1}{a} + \cdots + \frac{1}{a^n} + 1 + \frac{1}{b} + \cdots + \frac{1}{b^n}.$$

Une des principales difficultés consiste à passer en revue tous les cas possibles ; on peut remarquer cependant que $a$ et $b$ jouent des rôles symétriques et supposer par la suite que l'on a par exemple $|a| \leq |b|$.

Cas : $|b| \geq |a| > 1$
On a :

$$S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{a}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{a}} + \frac{1 - \left(\frac{1}{b}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{b}} = \frac{a}{a-1}\left(1 - \left(\frac{1}{a}\right)^{n+1}\right) + \frac{b}{b-1}\left(1 - \left(\frac{1}{b}\right)^{n+1}\right)$$

Comme $|b| > 1$ et $|a| > 1$,

$$\lim \left(\frac{1}{a}\right)^{n+1} = \lim \left(\frac{1}{b}\right)^{n+1} = 0$$

d'où :

$$\lim S_n = \frac{a}{a-1} + \frac{b}{b-1}.$$

▪ Voici le tableau récapitulatif de la solution proposée par Raphaël Sinteff (*qui est disponible sur le site de l'association*).

| | $a < -1$ | $a = -1$ | $a \in ]-1;0[$ | $a \in ]0;1[$ | $a = 1$ | $a > 1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $b < -1$ | $\ell$ | | | $+\infty$ | $+\infty$ | $\ell$ |
| $b = -1$ | | | | $+\infty$ | $+\infty$ | |
| $b \in ]-1;0[$ | | | | | | |
| $b \in ]0;1[$ | $+\infty$ | $+\infty$ | | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $b = 1$ | $+\infty$ | $+\infty$ | | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $b > 1$ | $\ell$ | | | $+\infty$ | $+\infty$ | $\ell$ |

où

$$\ell = \frac{a}{a-1} + \frac{b}{b-1}.$$

***Nota***. Cet exercice est issu du manuel de Roger Ferrieu, Algèbre et Trigonométrie, classe de mathématiques, conforme aux nouveaux programmes …[1]