B – Voici la solution de Marie-Nicole Gras.
Nous allons détailler les différentes étapes de la construction indiquée sur la figure de l'énoncé, en calculant chaque fois les longueurs correspondantes.

(i) Le bord inférieur du chemin (prolongé) coupe AD en F, et donc AF = $\dfrac{a-c}{2}$.

(ii) Le cercle de centre A et de rayon AF coupe le prolongement de BA en G ; donc AG = $\dfrac{a-c}{2}$.

(iii) Le cercle de centre B et de rayon BG = $a + \dfrac{a-c}{2} = \dfrac{3a-c}{2}$ coupe le prolongement de DA en H ; on a donc BH = $\dfrac{3a-c}{2}$.

(iv) Le cercle de centre B et de rayon BA = a coupe le segment BH en I ; on a donc BI = a.

(v) La droite perpendiculaire à AB menée de I, coupe le segment AB en J. Les triangles BJI et BAH sont semblables, et donc $\dfrac{\mathrm{BJ}}{\mathrm{BA}} = \dfrac{\mathrm{BI}}{\mathrm{BH}}$, $\dfrac{\mathrm{BJ}}{a} = \dfrac{2a}{3a-c}$,

$\mathrm{BJ} = \dfrac{2a^2}{3a-c}$, et donc $\mathrm{AJ} = a - \dfrac{2a^2}{3a-c} = \dfrac{a(a-c)}{3a-c}$.

(vi) Avec cette valeur de AJ, on réalise le partage demandé du carré ; en effet,

– l'aire du rectangle de côtés AD et AJ est égale à $\dfrac{a^2(a-c)}{3a-c}$;

– l'aire du rectangle de côtés BJ et BE est égale à $\dfrac{2a^2}{3a-c} \times \dfrac{a-c}{2} = \dfrac{a^2(a-c)}{3a-c}$;

– la somme des aires égales des trois rectangles et de celle du chemin est égale à

$$3\times\frac{a^2(a-c)}{3a-c}+c\times\frac{2a^2}{3a-c}=\frac{3a^3-3a^2c+2a^2c}{3a-c}=a^2.$$

Nota. Ces exercices sont issus des deux livres « Récréations arithmétiques » et « Curiosités géométriques », d'Émile Fourrey édités chez Vuibert[(2)].