Solutions : Michel Lafond (Dijon), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Vincent Thill (Migennes).

- Voici la solution de Pierre Renfer.

C'est la neuvième réduite du développement en fractions continues de $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

$$x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, a_0 = \lfloor x_0 \rfloor = 0^{(2)} ; x_1 = \frac{1}{x - a_0}, a_1 = \lfloor x_1 \rfloor = 2 ; x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1}, a_2 = \lfloor x_2 \rfloor = 1 ;$$

$$x_3 = \frac{1}{x_2 - a_2}, a_3 = \lfloor x_2 \rfloor = 1 ; x_4 = \frac{1}{x_3 - a_3}, a_4 = \lfloor x_4 \rfloor = 37 ; x_5 = \frac{1}{x_4 - a_4},$$

$$a_5 = \lfloor x_5 \rfloor = 4 ; x_6 = \frac{1}{x_5 - a_5}, a_6 = \lfloor x_6 \rfloor = 1 ; x_7 = \frac{1}{x_6 - a_6}, a_7 = \lfloor x_7 \rfloor = 1 ;$$

$$x_8 = \frac{1}{x_7 - a_7}, a_8 = \lfloor x_8 \rfloor = 1 \text{ et } x_9 = \frac{1}{x_8 - a_8}, a_9 = \lfloor x_9 \rfloor = 1 ;$$

(2) On rappelle que la notation $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

On obtient la valeur approchée suivante :

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\cfrac{1}{a_5+\cfrac{1}{a_6+\cfrac{1}{a_7+\cfrac{1}{a_8+\cfrac{1}{a_9}}}}}}}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{37+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}}}}}=\frac{1735}{4349}$$

Remarque.

Michel Lafond indique que le nombre de chiffres exacts fourni par cet algorithme des fractions continues est environ le double de celui du dénominateur de la fraction obtenue. Ici : $2 \times 4 = 8$.
Les calculs manuels sont relativement pénibles à cause des inversions, mais les logiciels comme MAPLE donnent instantanément :

```
with(numtheory) :
Digits = 30 : c := 1/sqrt(2*Pi);
cfrac(c, 10);
convert(c,confrac,'convergents');
convergents;
```

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{37+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{9\ldots}}}}}}}}}}$$

$$[0,2,1,1,37,4,1,1,1,1,9]$$

$$\left[0,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{75}{188},\frac{302}{757},\frac{377}{945},\frac{679}{1702},\frac{1056}{2647},\frac{1735}{4349},\frac{16671}{41788}\right]$$

Il faut juste prendre un nombre suffisant de chiffres significatifs dans le calcul [ici : Digits = 30].