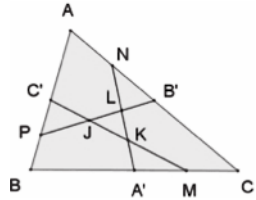
■ Voici la solution de Pierre Renfer.

On utilise les coordonnées barycentriques dans le repère affine (A, B, C).

Les coordonnées des points B′ et P sont : $B'\begin{vmatrix}1\\0\\1\end{vmatrix}\quad P\begin{vmatrix}1\\3\\0\end{vmatrix}.$



On en déduit l'équation de la droite (B′P) :

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 0 & 3 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3x + y + 3z = 0.$$

On obtient l'équation de la droite (C'M) par permutation circulaire : $3x - 3y + z = 0$.

On trouve les coordonnées de J, qui vérifient les deux équations : $J\begin{vmatrix}5\\6\\3\end{vmatrix}.$

Par permutation circulaire, on obtient les coordonnées de K e L :

$K\begin{vmatrix}3\\5\\6\end{vmatrix}\quad L\begin{vmatrix}6\\3\\5\end{vmatrix}.$

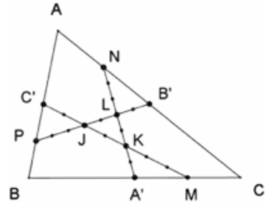
Le rapport d'aires $\dfrac{s}{S}$ est le déterminant dont les colonnes sont les coordonnées, de somme 1, des trois point J, K, L.

$$\frac{s}{S} = \frac{1}{14^3}\begin{vmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 6 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

Il est inutile de saisir la calculatrice. Le déterminant se factorise :

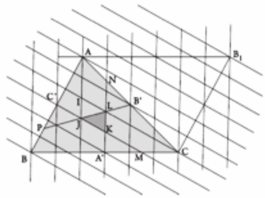
$$\begin{vmatrix} u & w & v \\ v & u & w \\ w & v & u \end{vmatrix} = u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = (u+v+w)\left(u^2 + v^2 + w^2 - uv - vw - wu\right).$$

Donc : $\dfrac{s}{S} = \dfrac{5^2 + 6^2 + 3^2 - 5\cdot 6 - 6\cdot 3 - 3\cdot 5}{14^3} = \dfrac{7}{14^3} = \dfrac{1}{28}.$



Remarque.

Les coordonnées barycentriques utilisées par Pierre Renfer amènent à conclure que chacun des segments [A′M], [B′N] et [C′P] est partagé en 7 parts égales (voir ci-contre). Si l'on admet cela, au collège on peut alors obtenir le résultat par comparaison d'aires en justifiant que l'aire de PJC′ vaut une fois et demie celle de JKL, que celle de AC′J la vaut trois fois, ainsi que celle de AJK, etc.



Michel Sarrouy propose une solution basée sur un réseau de parallèles, dont la justifiction relève également des barycentres.
Sa proposition est disponible sur le site de l'association.

Nota.
Ayant retrouvé après envoi un exercice similaire – n^{o} 474-3 (solution dans le BV 476) – Marie-Nicole Gras m'avait proposé de ne pas retenir celui-ci (on retrouve effectivement la demande du 474-3 après avoir tracé le triangle A'B'C' des milieux : montrer que JKL occupe un septième de A′B′C′). J'ai tout de même souhaité vous le proposer.