■ Voici la solution de Pierre Renfer.

On suppose le simili escargot de Pythagore construit.

1. Montrons, par récurrence, que $\mathrm{OA}_n^2 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$.

L'égalité est vraie pour $n = 0$.

Supposons que, pour un entier quelconque, $\mathrm{OA}_n^2 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$ et montrons que $\mathrm{OA}_n^2 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$.

D'après le théorème de Pythagore

$$\mathrm{OA}_{n+1}^2 = \mathrm{OA}_n^2 + \mathrm{A_n A}_{n+1}^2 = \left(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right) + a_{n+1}^2.$$

et, par suite, $\mathrm{OA}_{n+1}^2 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n+1}^2$.

2. Montrons, par récurrence, que $\mathrm{OA}_n^2 = a_0^2\, a_1^2\, a_2^2 \cdots a_n^2$.

L'égalité est vraie pour $n = 0$.

Supposons que, pour un entier n quelconque, $\mathrm{OA}_n^2 = a_0^2\, a_1^2\, a_2^2 \cdots a_n^2$ (et, par suite, $\mathrm{OA}_n = a_0\, a_1\, a_2 \cdots a_n$) et montrons que $\mathrm{OA}_{n+1}^2 = a_0^2\, a_1^2\, a_2^2 \cdots a_{n+1}^2$.

D'une part, l'aire du triangle rectangle $\mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}$ est

$$\frac{1}{2}\mathrm{OA}_n \times \mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_0\, a_1\, a_2 \cdots a_n\right) \times a_{n+1} = \frac{1}{2} a_0\, a_1\, a_2 \cdots a_{n+1}. \qquad (1)$$

D'autre part, l'aire du triangle rectangle $\mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}$ est

$$\frac{1}{2}\mathrm{OA}_{n+1} \times 1 = \frac{1}{2}\mathrm{OA}_{n+1}. \qquad (2)$$

Des égalités (1) et (2), il résulte $\mathrm{OA}_{n+1} = a_0\, a_1\, a_2 \cdots a_n\, a_{n+1}$ et donc que

$$\mathrm{OA}_{n+1}^2 = a_0^2\, a_1^2\, a_2^2 \cdots a_{n+1}^2.$$

3. Finalement, pour tout entier naturel n,

$$a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = a_0^2\, a_1^2\, a_2^2 \cdots a_n^2.$$

Remarque. L'initialisation au rang 0 répond parfaitement à la demande. Toutefois pour une adaptation en classe de cet exercice, il sera certainement préférable de faire étudier le cas du triangle $\mathrm{OA}_0\mathrm{A}_1$. Démontrer qu'au rang 1 on a bien $\mathrm{OA}_1^2 = a_0^2\, a_1^2$ met en place le principe de l'hérédité de la seconde récurrence.