

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Paul-Alain Bonvert (Alfa du Ginseng).

Voici la solution de Pierre Renfer.

1) Les milieux E, F, G, H forment un parallélogramme

Notons S_M la symétrie centrale, de centre le point M et $T_{(\vec{u})}$ la translation de vecteur \vec{u} .

Alors $J = S_H \circ S_G \circ S_F \circ S_E = T_{(2\overline{EF}-2\overline{GH})}$.

Comme J laisse le point A fixe, J est l'identité et $\overline{EF} = \overline{HG}$.

2) Transformation du quadrilatère

On colle ensemble les segments $[AE]$ et $[BE]$, puis les segments $[BF]$ et $[CF]$, puis les segments $[CG]$ et $[DG]$, puis les segments $[DH]$ et $[AH]$.

On passe alors du quadrilatère initial Q à un nouveau quadrilatère Q' dont les sommets sont les quatre avatars éclatés du point P et dont le point intérieur est la fusion des quatre points A, B, C, D .

Dans ce quadrilatère Q' , l'ordre des sommets du parallélogramme $EFGH$ est inversé par rapport celui qui existait dans le quadrilatère Q .

En retournant le quadrilatère Q' dans l'espace, on peut donc obtenir un quadrilatère Q'' dont les sommets E, F, G, H coïncident avec les sommets du parallélogramme du quadrilatère initial Q .

Si Q'' et Q sont isométriques, alors l'isométrie f qui applique Q sur Q'' est un déplacement et $Q'' = Q$ si tous les quadrilatères conservent finalement leur position initiale.

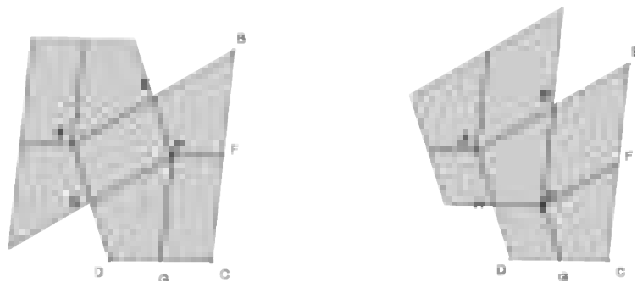
Le point A est alors le symétrique du point P par rapport au milieu de $[EH]$ et le quadrilatère $AHPE$ est un parallélogramme.

De même les quadrilatères $BEPF$, $CFPG$ et $DGPH$ sont des parallélogrammes.

On en déduit que le quadrilatère $ABCD$ est aussi un parallélogramme et que P est le centre de symétrie de ce parallélogramme.

Remarque de Paul-Alain Bonvert :

Il est possible que seuls deux parallélogrammes conservent leur position alors que les deux autres quadrilatères superposables permuteront, ainsi que le montre la figure suivante.



Des fichiers GeoGebra de ces différents assemblages sont disponibles sur le site de l'association.