Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Jean Couzineau (Massy-Palaiseau), Michel Lafond (Dijon).

Voici la solution de Jean Couzineau.

Soit l'intervalle $\mathrm{I} = \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$.

Avec un logiciel, on peut faire des considérations géométriques sur les courbes et trouver, par tâtonnement, des valeurs pour les coefficients. Je constate qu'il n'y a pas unicité pour les coefficients mais les différentes valeurs sont assez proches. Je n'arrive pas à justifier les valeurs des coefficients.

1) Trouver deux réels a, b tels que pour tout x de I, $\left|a + bx^2 - \cos(x)\right| \leq 0{,}03$.

Pour toute valeur de a dans l'intervalle [0,97 ; 0,9775], on peut trouver au moins une valeur de b. Par exemple, pour a = 0,97, toute valeur b dans l'intervalle [–0,405 ; –0,403] convient. Plus a est grand, plus l'intervalle pour b est petit et nécessite un grand nombre de décimales. Par exemple, si a = 0,977 seul b = –0,408 convient si on se limite à 3 décimales.

Sinon, on fixe des valeurs limites en 0 et en $\pi/2$ pour obtenir a et b et l'inégalité est

vérifiée pour tout x de I. Cette méthode fonctionne dans le cadre de ce problème mais je ne trouve pas de raison a priori (sauf le choix des expressions pour approximer). En 0, on doit avoir $|a-1| \leq 0{,}003$. *A priori*, $a \in [0{,}97 ; 1{,}03]$. On constate que pour $a > 1$, il n'y a pas de solution.
Prenons $a = 0{,}97$.
En $\pi/2$, on doit avoir $|a+b\pi^2/4| \leq 0{,}03$. Prenons $a + b\pi^2/4 = -0{,}03$ (avec $+0{,}03$, on n'obtient pas de valeur de b) qui donne $b = (-0{,}03 - a) \times 4/\pi^2 \approx -0{,}405$ qui convient.

2) Trouver trois réels a, b, c tels que pour tout x de I, $\left|\dfrac{a+bx^2}{1+cx^2} - \cos(x)\right| \leq 0{,}001$.

Comme précédemment, on trouve des valeurs par tâtonnement. Pour $x = 0$, on doit avoir $|a-1| \leq 0{,}001$, donc a $\in [0{,}99 ; 1{,}01]$ *a priori*. La valeur c influence beaucoup le résultat et semble être aux alentours de 0,1. Commençons par fixer $c = 0{,}1$. Fixons b dépendant de a en prenant $x = \pi/2$ et $\left|\dfrac{a+bx^2}{1+cx^2} - \cos(x)\right| = -0{,}01$ (je n'ai pas essayé $+0{,}01$) on en déduit $|a+b\pi^2/4| \leq 0{,}03$. Dans ces conditions, toute valeur de a dans l'intervalle $[0{,}992 ; 1{,}01]$ convient.
Dans les mêmes conditions, avec $c = 0{,}09$, on trouve a $\in [0{,}99 ; 0{,}998]$ et b calculé avec la formule $b = \left(-0.01\left(1+c\pi^2/4\right) - a\right) \times 4/\pi^2$. Apparemment, c ne doit pas trop s'éloigner de 0,1. Avec $c = 0{,}11$, on trouve $a = 0{,}999$ et b calculé qui convient.