A – Voici la solution de Daniel Văcaru.

Considérons $A = \{i+1, i+2, i+3, i+4, i+5\}$ cinq entiers consécutifs.

Parmi les dix équations possibles, puisque l'ordre n'est pas précisé, seulement deux aboutissent à une solution en nombres entiers naturels :

• $(i+1)^2 + (i+2)^2 + (i+3)^2 = (i+4)^2 + (i+5)^2$

$$\Rightarrow 3i^2 + 12i + 14 = 2i^2 + 18i + 41 \Rightarrow i^2 - 6i - 27 = 0$$

et pour $i = 9$, $A = \{10, 11, 12, 13, 14\}$ avec $10^2 + 11^2 + 12^2 = 100 + 121 + 144 = 365$ et $13^2 + 14^2 = 169 + 196 = 365$.

• $(i+1)^2 + (i+3)^2 + (i+4)^2 = (i+2)^2 + (i+5)^2$

$$\Rightarrow 3i^2 + 16i + 26 = 2i^2 + 14i + 29 \Rightarrow i^2 + 2i - 3 = 0$$

et pour $i = 1$, $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ avec $2^2 + 4^2 + 5^2 = 4 + 16 + 25 = 45 = 9 + 36 = 3^2 + 6^2$.

Remarque. Michel Lafond propose le prolongement suivant.

Plus généralement si on cherche à résoudre :

$$(a+1)^2 + (a+2)^2 + \cdots + (a+p)^2 = (a+p+1)^2 + (a+p+2)^2 + \cdots + (a+p+q)^2$$

avec $a \geq 0$; $p > q \geq 1$,
on trouve d'une part l'infinité de solutions :

$$(2k^2+k)^2 + \cdots + (2k^2+2k)^2 = (2k^2+2k+1)^2 + \cdots + (2k^2+3k)^2,$$

c'est-à-dire pour $k = 1$: $3^2 + 4^2 = 5^2$,

pour $k = 2$: $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$,

pour $k = 3$: $21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$, etc.

et d'autre part des solutions sporadiques, classées selon $p + q$ croissant :

p	q	$p+q$	
17	8	25	$18^2+\cdots+34^2=35^2+\cdots+42^2=11\,900$
35	10	45	$4^2+\cdots+38^2=39^2+\cdots+48^2=19\,005$
39	13	52	$12^2+\cdots+50^2=51^2+\cdots+63^2=42\,419$
51	25	76	$60^2+\cdots+110^2=111^2+\cdots+135^2=379\,525$
93	39	132	$67^2+\cdots+159^2=160^2+\cdots+198^2=1\,254\,539$
127	37	164	$16^2+\cdots+142^2=143^2+\cdots+179^2=963\,295$
382	191	573	$474^2+\cdots+855^2=856^2+\cdots+1046^2=173\,321\,231$

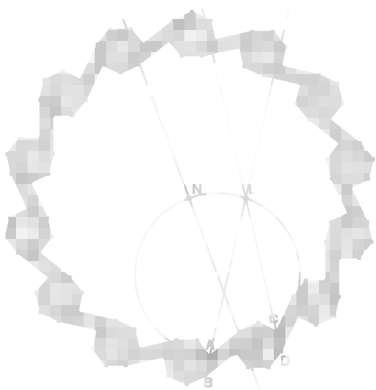
etc.

B – Voici la solution de Maurice Bauval.

La boucle se refermera exactement. Il y aura 14 heptagones et 14 carrés :

Lorsqu'on donne deux segments [AB] et [CD] de même longueur, non parallèles, il existe une rotation plane $\mathcal{R}$ qui vérifie $\mathcal{R}(A) = C$ et $\mathcal{R}(B) = D$. Le centre N de cette rotation est le point commun aux deux médiatrices de [AC] et [BD], ainsi qu'aux deux cercles circonscrits à A, C, L et B, D, L, où L est le point d'intersection des droites (AB) et (CD). L'angle de cette rotation est égal à l'angle des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. Si cet angle vaut $2\pi/n$ où n est un entier, $\mathcal{R}^n$ = Identité.
Dans notre cas cet angle vaut $\pi/7$ d'où $\mathcal{R}^{14}$ = Identité.

Remarque La boucle se refermerait de la même façon si à l'heptagone on avait accolé, à la place d'un carré, un rectangle, ou même un parallélogramme comme le montre la figure suivante(1).



(1) Cette figure me coupe le sifflet …