Voici la solution de Michel Lafond.

1) Quel est le nombre maximal de chiffres égaux, distincts de 0, pouvant terminer l'écriture décimale d'un carré parfait ?

Réponse : c'est 3 avec par exemple $38^2 = 1444$.

Les 22 terminaisons possibles modulo 100, d'un carré parfait (obtenues par balayage) sont :
00, 01, 04, 09, 16, 21, 24, 25, 29, 36, 41, 44, 49, 56, 61, 64, 69, 76, 81, 84, 89, 96.
Si on exclut 00, seule la terminaison 44 est du type *aa*, et elle se produit pour et seulement pour les carrés des entiers congrus à ± 12 ; ± 38 mod 100.
Le problème se ramène donc à trouver le nombre maximal de 4 pouvant terminer l'écriture décimale d'un carré parfait.
D'après ce qui précède, si on veut trois 4 en terminaison, les candidats sont les entiers qui se terminent par *12, *38, *88 ou *62. Soit on procède par balayage, soit on met en équation :

$(100\,k \pm 12)^2 = 10\,000\,k^2 \pm 2400\,k + 144 \equiv 444 \bmod 1000$ qui se simplifie :

$\pm 400\,k \equiv 300 \bmod 1000$ donc $\pm 4\,k \equiv 3 \bmod 10$, impossible, car $\pm 4\,k - 3$ est impair.

$(100\,k \pm 38)^2 = 10\,000\,k^2 \pm 7600\,k + 1444 \equiv 444 \bmod 1000$ qui se simplifie :

$\pm 600\,k \equiv -1000 \bmod 1000$ donc

$\pm 600\,k \equiv 0 \bmod 1000 \Leftrightarrow \pm 6\,k \equiv 0 \bmod 10 \Leftrightarrow k \equiv 0$ ou $5 \bmod 10$.

Si $k = 0$, $100\,k \pm 38 = 38$ ou $-38 \equiv 962 \bmod 100$.

Si $k = 5$, $100\,k \pm 38 = 538$ ou $462 \bmod 100$.

Vérifions : $38^2 = 1444$; $462^2 = 213\,444$; $538^2 = 289\,444$; $962^2 = 925\,444$.

Mais si on veut quatre 4 en terminaison, ça ne va plus, car si on examine les candidats possibles : *038, *462, *538, *962 on trouve à chaque fois une impossibilité, par exemple :

$(1000\,k \pm 462)^2 = 1\,000\,000\,k^2 \pm 924\,000\,k + 213\,444 \equiv 4444 \bmod 1000$ se simplifie :

$\pm 4000\,k + 3444 \equiv 4444 \bmod 1000 \Leftrightarrow \pm 4000\,k \equiv 1000 \bmod 1000$.

Soit $\pm 4k \equiv 1 \bmod 10$. C'est impossible.

2) Pour les cubes, on peut avoir des terminaisons par un nombre arbitrairement grand de 1, de 3, de 7 ou de 9.
C'est tout, car un balayage modulo 1000 donne les 4 seules terminaisons de type *aaa* : 111, 333, 777, 999.

D'abord, $(10k-1)^3 = 10^{3k} - 3\cdot 10^{2k} + 3\cdot 10^k - 1 = 10^{2k}(10k-3) + 2\cdot 10^k + (10^k - 1)$ donc

$$(10^k-1)^3 = \underbrace{999\cdots99}_{k-1 \text{ fois}}\,7\,\underbrace{000\cdots00}_{k-1 \text{ fois}}\,1\,\underbrace{999\cdots99}_{k \text{ fois}}$$

$(10^k-1)^3$ se termine par k « 9 ». Exemple : $999^3 = 997\,002\,999$..

Pour les autres chiffres, c'est plus compliqué, ainsi si on veut une terminaison en « 7 », on procède comme suit : partant de $3^3 = 27$ par exemple, on va ajouter un 7 en terminaison en résolvant :

$$(10k+3)^3 = 1000k^3 + 900k^2 + 270k + 27 \equiv 77 \bmod 100$$

qui se simplifie en

$$70k + 27 \equiv 77 \bmod 100 \Leftrightarrow 70k \equiv 50 \bmod 100 \Leftrightarrow 7k \equiv 5 \bmod 10 \Leftrightarrow k \equiv 5 \bmod 10.$$

Vérifions : $53^3 = 148\,877$.
Pour ajouter encore un 7 en terminaison on part de 53 et on résout :

$$(100k+53)^3 = 1\,000\,000k^3 + 1\,590\,000k^2 + 842\,700k + 148\,877 \equiv 777 \bmod 1000$$

qui se simplifie en

$$700k + 877 \equiv 777 \bmod 1000$$

$$\Leftrightarrow 700k \equiv -100 \bmod 1000 \Leftrightarrow 7k \equiv 9 \bmod 10 \Leftrightarrow k \equiv 7 \bmod 10.$$

Et en effet : $753^3 = 426\,957\,777$. Ici, on a un « 7 » non prévu, tant mieux.
Cela fonctionne à l'infini, car on se ramène toujours à une équation $7k \equiv a \bmod 10$, qui équivaut à $k \equiv 3a \bmod 10$ puisque l'inverse de 7 modulo 10 est égal à 3.
Pour ajouter un « 7 », le plus simple est par conséquent, d'essayer les 10 chiffres devant le résultat antérieur. Ainsi en essayant * 07 533 = …77 777 on trouve la seule solution 607 533 = 224 234 888 577 777.
Puis, en essayant * 60 753³ = …777 777 on trouve la seule solution

$$660\,753^3 = 288\,481\,143\,504\,777\,777$$

etc.