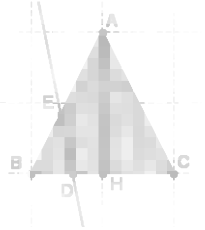
Voici la solution de Walter Mesnier.
Remarquons d'emblée que l'expérience aléatoire présentée ici manque de précision. En effet il y a plusieurs façons de choisir « au hasard » une droite qui coupe le triangle. On s'expose sans doute dans cet exercice à un paradoxe type « Bertrand ». Quoiqu'il en soit, cherchons à modéliser la situation pour obtenir une réponse au problème.



On suppose que BC = AH = 2 de sorte que AB = $\sqrt{5}$ et que $\cos\left(\widehat{ABH}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

On définit la droite (DE) en choisissant E sur le segment [AB] puis D sur le segment [BC].
Pour cela on pose x = BD et y = BE et on tire au hasard (selon une loi uniforme) $x \in [0;2]$ et $y \in [0;\sqrt{5}]$.

Il faut maintenant chercher une relation qui traduit la condition DE ≥ BC.
On peut utiliser le théorème d'Al Kashi dans le triangle BED :

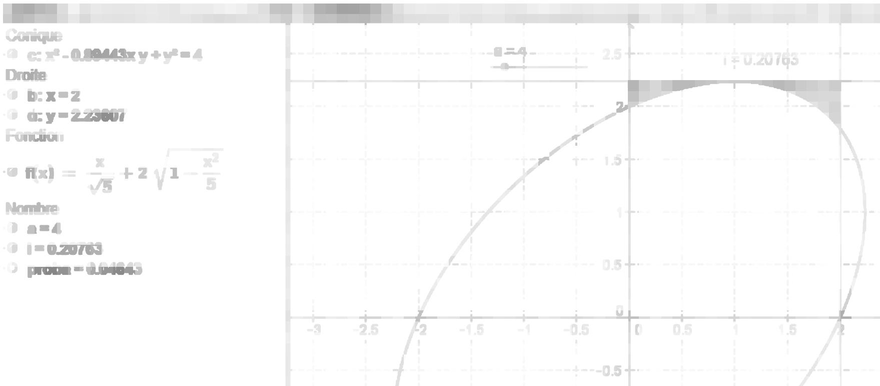
$$\mathrm{DE}^2 = \mathrm{BD}^2 + \mathrm{BE}^2 - 2 \times \mathrm{BD} \times \mathrm{BE} \times \cos\left(\widehat{\mathrm{EBD}}\right).$$

Donc $\mathrm{DE}^2 = x^2 + y^2 - \frac{2xy}{\sqrt{5}}$.

On obtient une relation équivalente à DE ≥ BC en écrivant $\mathrm{DE}^2 \geq 4$ avec $\mathrm{D} \in [\mathrm{BC}]$ et $\mathrm{E} \in [\mathrm{BA}]$;

c'est-à-dire $x^2 + y^2 - \frac{2xy}{\sqrt{5}} \geq 4$ avec $(x,y) \in [0;2] \times [0;\sqrt{5}]$.

La probabilité cherchée revient à calculer le rapport des aires $\frac{A_1}{A_2}$ où A_2 est l'aire du rectangle de largeur 2 et de longueur $\sqrt{5}$ et A_1 est l'aire grisée dans la figure ci-dessous (portion de plan extérieure à l'ellipse d'équation $x^2 + y^2 - \frac{2xy}{\sqrt{5}} = 4$ et à l'intérieur du rectangle).



On trouve à l'aide de GeoGebra (par exemple) que ce rapport vaut environ $\dfrac{0.20763}{2\sqrt{5}} \approx 0.04643$ donc une probabilité d'environ 4,6%. Ce qui est peu. Mais pour ce qu'on veut en faire …

Remarque 1. Pour la valeur exacte, il faudrait calculer l'intégrale $\int_0^1 \left(\sqrt{5} - f(x)\right) \mathrm{d}x$ où $f(x)$ exprime y en fonction de x dans l'équation de la partie « haute » de l'ellipse, mais on peut se contenter d'une valeur approchée déjà très précise (4,6%), pour une probabilité qui était déjà mal définie au départ...
Cela dit, avec un peu de patience, ou de technique ou avec un logiciel de calcul formel, on finit par obtenir une primitive de $f(x) = 2\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{5}} + \dfrac{x}{\sqrt{5}}$:

$$\mathrm{F}(x) = \sqrt{5}\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + x\sqrt{1 - \frac{x^2}{5}} + \frac{x^2}{2\sqrt{5}}.$$

On en déduit la valeur exacte de la probabilité cherchée : $0{,}6 - 0{,}5\arcsin\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$, mais cela ne nous avance pas beaucoup plus...

Remarque 2. Avec la même approche, la relation

$$\mathrm{P}(\mathrm{DE} \geq \mathrm{BC}) = \mathrm{P}(\mathrm{E} \in [\mathrm{AB}]) \times \mathrm{P}_{\mathrm{E}\in[\mathrm{AB}]}(\mathrm{DE} \geq \mathrm{BC}) + \mathrm{P}(\mathrm{E} \in [\mathrm{AC}]) \times \mathrm{P}_{\mathrm{E}\in[\mathrm{AC}]}(\mathrm{DE} \geq \mathrm{BC})$$

alliée à des considérations de symétrie, permet à Pierre Renfer et Pierre Carriquiry de n'étudier que le seul cas dans lequel E est sur[AB] pour obtenir la même probabilité.
Par une approche angulaire, Michel Lafond et moi-même obtenons une probabilité d'environ 0,01621 confirmant ainsi que choisir une droite au hasard est déjà hasardeux !
L'étude de Michel Lafond est disponible sur le site de l'association.