Voici la solution de L-G Vidiani.

A – Le problème, consiste à trouver les nouvelles coordonnées (les repères n'ont aucune raison d'être orthonormés) des points d'anciennes coordonnées $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$.

Soit X' la matrice colonne des nouvelles coordonnées d'un point et X celle de ses anciennes coordonnées.

$\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ forme un nouveau repère.

La formule de changement de repère est $X-A=PX'$, où A désigne la matrice colonne des coordonnées de A et P la matrice de passage. P est connue : ses colonnes sont les composantes, sur l'ancienne base, des nouveaux vecteurs de base $\vec{e_1'} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{e_2'} = \overrightarrow{AC}$. P est inversible puisque ABC est un vrai triangle.

On a donc $X' = P^{-1}(X - A)$, P^{-1} étant l'inverse de P.

Ainsi la matrice des nouvelles coordonnées de l'origine de l'ancien repère est $O' = P^{-1}A$; et si on pose $I = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ les matrices des nouvelles coordonnées sont $I' = P^{-1}(I - A)$ et $J' = P^{-1}(J - A)$.

Remarque : la formule de changement de repère est généralisable en dimension n, en se donnant un simplexe (généralisation d'un triangle).

B – Comme la fonction $x \mapsto f(x) = x + \ln(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et par symétrie des rôles de a et b en les échangeant au besoin :
si $a < b$ alors $b = f(a) < f(b) = a$… Contradiction !
Donc seul $a = b$ convient ce qui donne $\ln(a) = 0$ donc $a = b = 1$ est la seule solution.