

Voici les solutions de Raymond Heitz.

Première démonstration.

Elle repose sur le fait que chaque diagonale issue de  $A_1$  (sauf les extrêmes) est bissectrice de l'angle formé par celles qui l'entourent.

Prenons les cas de la figure : le premier triangle « à gauche » est  $A_1A_2A'_3$  et le suivant  $A_1A'_3A'_4$ .

$(A_1A'_3)$  est bissectrice de  $\widehat{A_2A_1A'_4}$  et on a la relation classique :

$$\frac{A_1A_2}{A_2A'_3} = \frac{A_1A'_4}{A'_3A'_4},$$

d'où

$$\frac{A_1 A_2 \times A_1 A'_3}{A_2 A'_3} = \frac{A_1 A'_4 \times A_1 A'_3}{A'_3 A'_4}.$$

Or le premier rapport est égal à 1 (i.e le triangle est multiplicatif) car  $A_1 A_2 A'_3$  est isocèle et  $A_1 A_2 = 1$ .

Donc le deuxième rapport est lui aussi égal à 1 et le triangle  $A_1 A'_3 A'_4$  est multiplicatif.

Et ainsi, par une sorte de récurrence, on voit qu'il en est de même pour tous ces triangles.

Seconde démonstration.

Considérons le cercle circonscrit au polygone. Il est transformé en la droite  $(A_2 A_n)$  par l'inversion de pôle  $A_1$  de puissance 1 (car  $A_1 A_2 = 1$ ). Considérons également « le grand » triangle  $A_1 A_k A_{k+1}$  ( $2 \leq k \leq n-1$ ) contenant « le petit » triangle  $A_1 A'_k A'_{k+1}$ .

Par suite de l'inversion les droites  $(A'_k A'_{k+1})$  et  $(A_k A_{k+1})$  sont antiparallèles par rapport à  $(A_1 A_k, A_1 A_{k+1})$  et les triangles  $A_1 A'_k A'_{k+1}$  et  $A_1 A_k A_{k+1}$  sont semblables. Ainsi :

$$\frac{A_1 A'_k}{A_1 A_{k+1}} = \frac{A_1 A'_{k+1}}{A_1 A_k} = \frac{A'_k A'_{k+1}}{A_k A_{k+1}} ;$$

mais  $A_1 A_k \times A_1 A'_k = A_1 A_{k+1} \times A_1 A'_{k+1}$  (inversion). D'où  $A_1 A'_k \times A_1 A'_{k+1} = A'_k A'_{k+1}$  car  $A_k A_{k+1} = 1$ .

**Remarque.** Raymond Heitz précise qu'il ne trouve pas satisfaisante la définition d'un triangle multiplicatif puisqu'elle n'est pas stable par changement d'échelle.