Voici la solution de Hervé Legrand. On va raisonner par condition nécessaire et condition suffisante :

1) Supposons que (a,b,c) soit une solution de (*) (a, b, c entiers relatifs non nuls).

On a :

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c^2}\Leftrightarrow\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\frac{1}{c^2}\Leftrightarrow c^2\left(a^2+b^2\right)=a^2b^2 \qquad (**)$$

Comme $\left(a^2+b^2\right)$ est un entier naturel, on a : c^2 divise a^2b^2, d'où c divise ab. Il existe donc un entier relatif d tel que $ab = dc$.

La relation (**) donne alors $c^2\left(a^2+b^2\right)=c^2d^2$, d'où $a^2 + b^2 = d^2$.

Bilan : si (a,b,c) est solution de (*) alors $\dfrac{ab}{c}$ est un entier naturel et $\left(a,b,\dfrac{ab}{c}\right)$ est un triplet pythagoricien.

2) Supposons que (p,q,r) est un triplet pythagoricien (dans $\mathbb{Z}$), on alors $p^2 + q^2 = r^2$.

En divisant cette relation par $p^2q^2r^2$ on obtient : $\dfrac{1}{q^2r^2} + \dfrac{1}{p^2r^2} = \dfrac{1}{p^2q^2}$.

Soit en posant $a = qr$, $b = pr$ et $c = pq$, on obtient bien un triplet (a,b,c) solution de (*).

Conclusion : l'ensemble des solutions de (*) est :

$$\left\{(pr,qr,pq) \text{ tels que les entiers relatifs } p, q \text{ et } r \text{ vérifient } p^2 + q^2 = r^2\right\}.$$

Par exemple, pour le triplet pythagoricien (3,4,5), cela donne :

$a = 3 \times 5 = 15$, $b = 4 \times 5 = 20$ et $c = 3 \times 4 = 12$ et on vérifie que $\dfrac{1}{15^2} + \dfrac{1}{20^2} = \dfrac{1}{12^2}$.

Remarque : Si (a,b,c) est solution de (*), alors pour tout entier relatif k non nul, (ka,kb,kc) est aussi solution de (*).