Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Robert March (Paris).

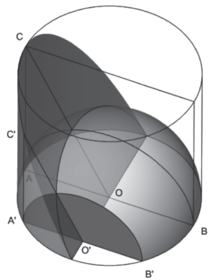
A. Voici la solution de Robert March.

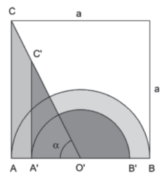
« Si en coupant deux solides par une suite de plans parallèles on obtient des sections dont les aires correspondantes sont toujours dans le même rapport, les volumes compris entre deux de ces plans sont dans le même rapport » (O. Terquem, *Manuel de géométrie*, 1835, p. 271).
Résumant ainsi la « méthode de Cavalieri », Terquem l'applique à la détermination du volume d'un onglet cylindrique (op. cit., § 685, p. 385-386).

Voici son procédé adapté à l'onglet cylindrique qui nous occupe.

Coin cylindrique

On considère un cylindre de révolution ayant pour base un cercle de centre O et de rayon $\frac{a}{2}$ et pour hauteur a. L'onglet cylindrique est obtenu en le coupant par un plan passant par O et faisant avec l'axe du cylindre un angle α (ici, $\tan \alpha = 2$).





(1) Voir au besoin sur http://www.mathcurve.com/surfaces/coinconic/coinconic.shtml

L'idée est de comparer son volume à celui d'une demi-sphère ayant pour équateur le cercle de base du cylindre (cf. figure).

L'onglet admet un plan de symétrie (P). Ce plan coupe la demi-sphère selon un demi-disque de rayon OA = $\frac{a}{2}$ et d'aire $\frac{\pi a^2}{8}$ et l'onglet selon un triangle rectangle ACO d'aire $\frac{a^2}{4}$.

Soit un plan (P′) parallèle à (P) qui coupe la demi-sphère selon un demi-disque de rayon r = O′A′ et d'aire $\frac{\pi r^2}{2}$, et qui coupe l'onglet selon un triangle rectangle (A′C′O′) d'aire $\frac{\pi a^2}{8}$. Le rapport de ces aires est égal à $\frac{\pi}{2}$: il est donc indépendant de la position du plan (P′). Suivant alors Cavalieri nous en concluons que c'est également le rapport des volumes associés.

Le volume de l'onglet vaut donc $v = \dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{6}$ et celui du coin cylindrique

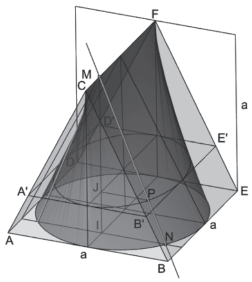
V = $V_1 - 2v$, où V_1 désigne le volume du cylindre. On a donc $V = \frac{\pi a^3}{4} - \frac{2a^3}{6}$ et finalement :

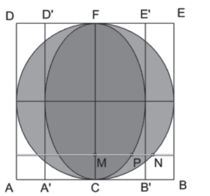
$$V = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\right)a^3.$$

Coin conique

La même méthode permet de calculer le volume du coin conique inscrit dans le prisme droit ABCDEF (voir figure). C'est le conoïde de directrice le cercle gamma de rayon R = $\frac{a}{2}$ inscrit dans le carré ABED, d'axe (CF) et de plan directeur (ABC).

Soit MN une génératrice de ce conoïde (parallèle à (ABC), elle coupe CF en M et le cercle gamma en N).





projection orthogonale sur le plan (ABED)

Un plan parallèle à ABED coupe [MI] en J et [MN] en P. Posons $k = \frac{MJ}{MI}$ $(0 < k < 1)$.

On a alors $\frac{MP}{MN} = \frac{MJ}{MI} = k$: P est l'image de N dans une affinité orthogonale d'axe CF et de rapport k, qui transforme le carré ABED en un rectangle A′B′E′D′ de longueur a et de largeur ka ; et qui transforme le cercle inscrit dans ce carré en l'ellipse inscrite dans ce rectangle.

Aire de l'ellipse de grand axe a, de petit axe ka : $A' = \pi \frac{a}{2}\frac{ka}{2}$.

Aire du rectangle : $A'_1 = (ka)a$.

$\frac{A'}{A'_1} = \frac{\pi}{4}$ est indépendant de k.

Suivant à nouveau Cavalieri on en déduit que $\frac{V'}{V'_1} = \frac{A'}{A'_1} = \frac{\pi}{4}$, où V′ désigne le volume du coin conique et $V'_1 = \frac{1}{2}a^2 a$ celui du prisme.

Finalement : $V' = \frac{\pi}{8}a^3$.

Remarques : $V' \approx 0{,}39\, a^3$, $V \approx 0{,}45\, a^3$ et, logiquement, $V' < V$.
Au sujet des « indivisibles de Cavalieri », on relira avec délectation l'article de Nicolas Bouleau « Géométrie mentale » (*Bulletin vert*, nº 423, sept/oct 1999).

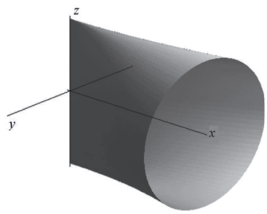
B. Voici la solution de Pierre Renfer.

On choisit l'unité de longueur de sorte que le côté du carré, le diamètre du cercle, la base et la hauteur du triangle isocèle soient égales à 2.

1) Volume du coin conique

Le site mathcurve référencé par l'énoncé indique que l'équation cartésienne du coin conique d'axe Oz, de plan directeur z = 0, et de directrice le cercle $\begin{cases} x = a \\ y + z^2 = b^2 \end{cases}$ est

$$x^2z^2 = b^2x^2 - a^2y^2.$$



Avec $a = 2$ et $b = 1$, l'équation du coin conique s'écrit :

$$x^2z^2 = x^2 - 4y^2.$$

Pour une valeur de z fixée, soit P(z) le plan horizontal de cote z.
L'intersection du coin conique et du plan P(z) est un triangle isocèle ABC.

Les coordonnées des sommets sont : $A\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{vmatrix}$ $B\begin{vmatrix} 2 \\ -\sqrt{1-z^2} \\ z \end{vmatrix}$ $C\begin{vmatrix} 2 \\ \sqrt{1-z^2} \\ z \end{vmatrix}$.

La hauteur du triangle est égale à 2 et la base BC est égale à $2\sqrt{1-z^2}$.

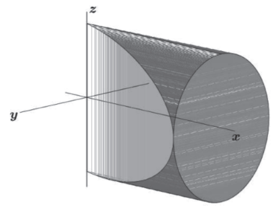
Donc l'aire du triangle est : $S(z) = 2\sqrt{1-z^2}$.

Le volume V du coin conique est : $V = \int_{-t}^{t} S(z)\cdot \mathrm{d}z = 2\int_{-t}^{t} \sqrt{1-z^2}\cdot \mathrm{d}z = \pi$.

(La fonction $z \mapsto \sqrt{1-z^2}$ a pour graphe un demi-cercle de rayon 1.
Donc l'intégrale est égale à π, l'aire d'un disque de rayon 1)

2) Volume du coin cylindrique

Pour le coin cylindrique, on choisit le repère de sorte que l'arête soit sur l'axe des z comme pour le coin conique.
L'équation du cylindre est : $y^2 + z^2 = 1$.
Les deux plans de taille du coin cylindrique ont pour équations $x + 2y = 0$ et $x - 2y = 0$.
L'intersection du coin cylindrique et du plan $P(z)$ est formée d'un triangle ABC et d'un rectangle BDEC.
Les coordonnées des sommets sont :



$$A\begin{vmatrix}0\\0\\z\end{vmatrix} \quad B\begin{vmatrix}2\sqrt{1-z^2}\\-\sqrt{1-z^2}\\z\end{vmatrix} \quad C\begin{vmatrix}2\sqrt{1-z^2}\\\sqrt{1-z^2}\\z\end{vmatrix} \quad D\begin{vmatrix}2\\-\sqrt{1-z^2}\\z\end{vmatrix} \quad E\begin{vmatrix}2\\\sqrt{1-z^2}\\z\end{vmatrix}.$$

L'aire du triangle est égale à $2\sqrt{1-z^2}$ et celle du rectangle à $4\sqrt{1-z^2}\cdot\left(1-\sqrt{1-z^2}\right)$.

L'aire totale $S'(z)$ est donc : $S'(z) = 4\sqrt{1-z^2} + 2\left(z^2-1\right)$.

Le volume V' du coin cylindrique est donc :

$$V' = \int_{-t}^{t} S'(z)\cdot \mathrm{d}z = 4\int_{-t}^{t} \sqrt{1-z^2}\cdot \mathrm{d}z + 2\int_{-t}^{t}\left(z^2-1\right)\cdot \mathrm{d}z = 2\pi - \frac{8}{3}.$$