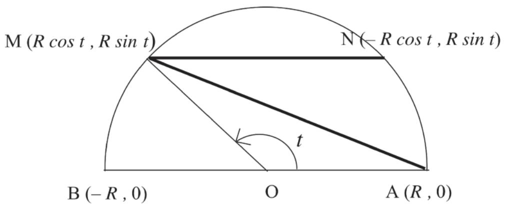
Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d’Orques), L.G Vidiani (Fontaine les Dijon), Raymond Heitz (Névez).

Voici la solution de L.G Vidiani.
Dans un repère orthonormé, on a les deux cas de figure :



Si $t \geq \frac{\pi}{2}$ AM + MN = $2R\,(\sin\frac{t}{2} - \cos t)$ Si $t \leq \frac{\pi}{2}$ AM + MN = $2R\,(\sin\frac{t}{2} + \cos t)$

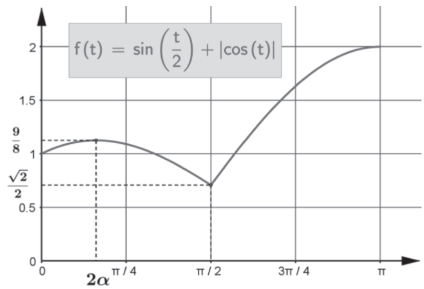
En effet, $AM^2 = R^2\left((1-\cos t)^2 + (\sin t)^2\right) = R^2(2-2\cos t) = 4R^2\left(\sin\frac{t}{2}\right)^2$

et $MN^2 = 4R^2(\cos t)^2$.

Posons $f(t) = \sin\frac{t}{2}$, $\lambda = \frac{1}{2R}$ et $\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{4}\right)$.

Il faut donc résoudre et discuter $f(t) = \lambda$, t étant dans l'intervalle $[0,\pi]$.

La courbe représentative de f est :



L'étude de f est simple :

$f(0) = 1$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, , $f(\pi) = 2$.

Si $t \geq \frac{\pi}{2}$, $f'(t) = \frac{1}{2}\cos\frac{t}{2} + \sin t = \frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\left(1 + 4\sin\frac{t}{2}\right) > 0$ sauf pour $t = \pi$ où $f'(\pi) = 0$.

Donc l'arc droit est croissant.

Si $t \leq \frac{\pi}{2}$, $f'(t) = \frac{1}{2}\cos\frac{t}{2} - \sin t = \frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\left(1 - 4\sin\frac{t}{2}\right) > 0$ est du signe de $\frac{1}{4} - \sin\frac{t}{2}$.

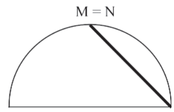
Donc, l'arc gauche a un maximum pour $t = 2\arcsin\left(\frac{1}{4}\right) = 2\alpha$:

$$y = f(2\alpha) = \sin(\alpha) + \cos(2\alpha) = \frac{9}{8}.$$

La discussion est purement géométrique puisque M est parfaitement déterminé par t.

- Si $\lambda < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ($l > R\sqrt{2}$) il n'y a pas de solution.

• Si $\lambda = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ($l = \mathrm{R}\sqrt{2}$) il y a une solution $t = \dfrac{\pi}{2}$.



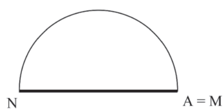
• Si $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < \lambda < 1$ ($\mathrm{R}\sqrt{2} < l < 2\mathrm{R}$) il y a deux solutions :

Pour l'arc gauche : $\sin\dfrac{t}{2} + \cos t = \lambda$ soit, en posant $s = \sin\dfrac{t}{2}$, $2s^2 - s + \lambda = 0$.

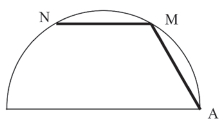
On tire $s = \dfrac{1+\sqrt{9-8\lambda}}{4}$ [car le produit des deux racines $\dfrac{\lambda-1}{2}$ est négatif] donc $t = 2\arcsin\left(\dfrac{1+\sqrt{9-8\lambda}}{4}\right)$.

De même pour l'arc droit $2s^2 + s - \lambda = 0$ qui donne $t = 2\arcsin\left(\dfrac{-1+\sqrt{8\lambda+9}}{4}\right)$.

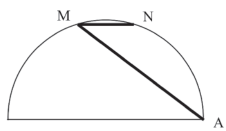
• Si $\lambda = 1$ ($l = 2\mathrm{R}$) il y a trois solutions :
La solution évidente $t = 0$ et les deux solutions précédentes avec $\lambda = 1$ c'est-à-dire $2\arcsin\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ et $2\arcsin\left(\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}\right)$.



$t = 0$



$t = \pi/3$



$t = 2\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right)$

• Si $1 < \lambda < \dfrac{9}{8}$ ($2\mathrm{R} < l < \dfrac{9}{4}\mathrm{R}$) il y a trois solutions :

Pour l'arc gauche : $t = 2\arcsin\left(\dfrac{1\pm\sqrt{9-8\lambda}}{4}\right)$

et pour l'arc droit $t = 2\arcsin\left(\dfrac{-1+\sqrt{8\lambda+9}}{4}\right)$.

• Si $\lambda = \dfrac{9}{8}$ ($l = \dfrac{9}{4}\mathrm{R}$) il y a deux solutions obtenues en faisant $\lambda = \dfrac{9}{8}$ dans le cas précédent :

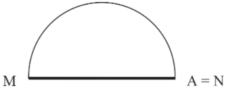
Pour l'arc gauche : $t = 2\arcsin\left(\dfrac{1}{4}\right) = 2\alpha$ [solution double]

et pour l'arc droit $t = 2\arcsin\left(\dfrac{-1+3\sqrt{2}}{4}\right)$.

• Si $\dfrac{9}{8} < \lambda < 2$ ($\dfrac{9}{4}\mathrm{R} < l < 4\mathrm{R}$) il y a une solution :

Pour l'arc droit $t = 2\arcsin\left(\dfrac{-1+\sqrt{8\lambda+9}}{4}\right)$.

- Si $\lambda = 2$ ($l = 4R$) il y a une solution évidente $t = \pi$.
- Si $\lambda > 2$ ($l > 4R$) il n'y a pas de solution.



Remarque : cet exercice qui se pratiquait dans les années 192* est intéressant pour la rigueur nécessaire dans la discussion.