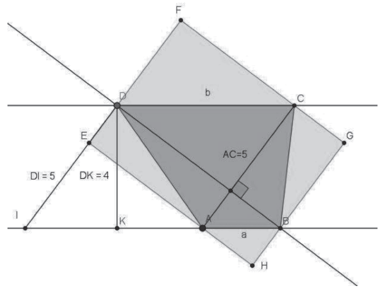
Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Alain Bougeard (les Lilas), Jean Pilloy (Montpellier), Raymond Heitz (Névez), L.G Vidiani (Fontaine les Dijon).



A. Voici la solution de Alain Bougeard.
Le trapèze à diagonales perpendiculaires ABCD fait penser au rectangle EFGH de côtés parallèles aux diagonales [AC] et [BD] et d'aire double de celle du trapèze ABCD.
Nous connaissons déjà sa largeur AC = 5. Pythagore nous donnera facilement sa longueur [DB], dans le triangle DBK, lorsque nous connaîtrons [KB].
Or dans le triangle rectangle DKI nous reconnaissons le célèbre triangle 3, 4, 5 donc IK = 3.
Alors dans l'autre triangle rectangle IDB nous pouvons appliquer la relation de la hauteur : $DK^2 = KI \times KB$,
d'où nous tirons KB = 16/3.
Donc finalement dans le triangle DBK :
$DB^2 = 4^2 + (16/3)^2 = (20/3)^2$.
Nous obtenons donc l'aire du trapèze ABCD = 1/2 × 5 × 20/3 × 50/3.

B. Voici la solution de Jean Pilloy.
Soit a un réel strictement positif quelconque. Étudions les variations de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{a} - \frac{a}{x} - \ln\left(\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Cette fonction est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on obtient pour tout $x > 0$

$$f'(x) = \frac{(x-a)^2}{ax^2}.$$

On en tire f que est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
Or $f(a) = 0$ donc si $x > a$, $f(x) > 0$.
On a finalement démontré que pour tout $a > 0$ et pour tout $x > a$ on a

$$\frac{x}{a} - \frac{a}{x} > \ln\left(\frac{x^2}{a^2}\right).$$

En remplaçant x par b, on obtient l'inégalité à prouver.