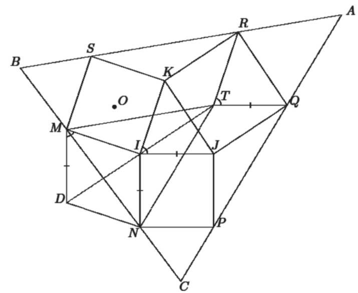
Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Éric Trotoux (Caen).

• Voici la solution de Marie-Nicole Gras.

I) Une propriété des médianes.

On considère un triangle IJK ; on construit à l'extérieur de ce triangle les carrés IJPN, JKRQ et KIMS.
Les droites PQ et RS se coupent en A ; les droites RS et MN se coupent en B ; les droites MN et PQ se coupent en C.
Nous allons montrer que :



Proposition. Chaque médiane du triangle ABC est perpendiculaire aux deux côtés parallèles du carré inscrit dans l'angle correspondant.

Démonstration. Soit T le quatrième sommet formant le parallélogramme RSMT.
(i) Les triangles IJK et TQR sont isométriques et ont leurs côtés parallèles deux à deux. En effet [RT], [SM] puis [KI] sont de même longueur et parallèles, ainsi que [RQ] et [KJ].
(ii) Il en résulte que [IJ], [TQ] et [NP] sont de même longueur et parallèles, donc le quadrilatère TQPN est un parallélogramme et [TN] et [QP] sont de même longueur et parallèles.
(iii) On a donc montré que le triangle TMN a ses côtés parallèles à ceux du triangle ABC : [MN] // [BC], [NT] // [CA], [TM] // [AB].

Pour démontrer la proposition, il suffit de montrer que les médianes de TMN sont perpendiculaires aux côtés des carrés correspondants.

(iv) Le quadrilatère TQJI est un parallélogramme. Puisque l'angle $\widehat{KIQ}$ est droit, alors [TI] qui est parallèle à [QJ] est perpendiculaire à [JK].

(v) Soient O le centre du carré IKSM et D le quatrième sommet formant le parallélogramme MIND.

La rotation de centre O et d'angle $\pi/2$ transforme M en I et I en K ; les angles $\widehat{DMI}$ et $\widehat{KIJ}$ sont égaux (comme supplémentaires de $\widehat{MIN}$), et on a MD = IN = IJ.
Cette rotation transforme donc le triangle MDI en le triangle IJK, donc ID = KJ et [ID] ⊥ [KJ].
(vi) On vient de montrer que [ID] ⊥ [KJ] et on a montré au (iv) que [IT] ⊥ [KJ] ; il en résulte que D, I et T sont alignés ; et puisque ID = KJ = IT, alors I est le milieu de [DT].

On a donc les égalités vectorielles $\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN}+\overrightarrow{IT}=\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IT}=\vec{0}$; et par conséquent I est le centre de gravité du triangle TMN. Les médianes de TMN sont donc portées par (TI), (MI) et (NI), d'où le résultat.

II) Construction des trois carrés, dits carrés de Malfatti.

On se donne un triangle ABC, et on cherche à inscrire dans ce triangle les trois carrés IJPN, JKRQ et KIMS, avec la disposition du I). On désigne par M_A, M_B et M_C les droites qui portent les médianes de ABC.
(i) On trace trois droites : D_A perpendiculaire à M_A, D_B perpendiculaire à M_B et D_C perpendiculaire à M_C, de manière à ce qu'elles forment un triangle. On note : I′ = DB ∩ DC ; J′ = DC ∩ DA ; K′ = DA ∩ DB.
D'après le I), le triangle IJK cherché a ses côtés parallèles à ceux de I′J′K′.
(ii) On trace extérieurement au triangle I′J′K′ les trois carrés I′J′P′N′, J′K′R′Q′ et K′I′M′S′ ; puis on construit comme au I) le triangle A′B′C′.
(iii) Les triangles ABC et A′B′C′ ont leurs côtés parallèles deux à deux ; ils sont homothétiques et le centre d'homothétie est le point L, intersection de AA′, BB′ et CC′.
Par cette homothétie, le triangle A′B′C′ et ses trois carrés se « transportent » dans le triangle ABC.