Terminale S – Devoir surveillé – 3 h

L'énoncé comporte quatre pages numérotées de 1 à 4. Les exercices 1, 2 et 3 sont à traiter par tous les élèves. Traiter l'exercice 4 ou l'exercice 5.
L'utilisation de la calculatrice est autorisée.
La présentation et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 **4 points**

On se propose de résoudre l'équation différentielle

$$y' - 2y = x\mathrm{e}^{x} \qquad \text{(E)}$$

1. On admet qu'il existe une unique fonction v_0 solution de (E) vériant $v_0(0) = 1$.
Donner une équation de la tangente T à la courbe représentative de v_0 en son point d'abscisse 0.
2. On considère l'équation différentielle

$$y' - 2y = 0 \qquad (\mathrm{E}_0)$$

Donner les fonctions solutions de (E_0).
3. Soient a et b deux réels et soit u la fonction dénie sur $\mathbb{R}$ par

$$u(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{x}.$$

   a. Déterminer l'unique couple $(a,\ b)$ tel que u soit solution de l'équation différentielle (E).
   b. Montrer que v est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si $v - u$ est solution de l'équation différentielle $(\mathrm{E}\ _0)$.
   c. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
4. Déterminer la solution v_0 de l'équation (E) qui prend la valeur 1 en 0.

Exercice 2 **7 points**

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit φ la fonction dénie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = \left(x^2 + x + 1\right)\mathrm{e}^{-x} - 1.$$

1. **a.** Déterminer les limites de φ en -1 et en $+1$.
   b. Étudier le sens de variations de φ puis dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, dont l'une dans l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$, qui sera notée α.
Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
3. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$ et le présenter dans un tableau.

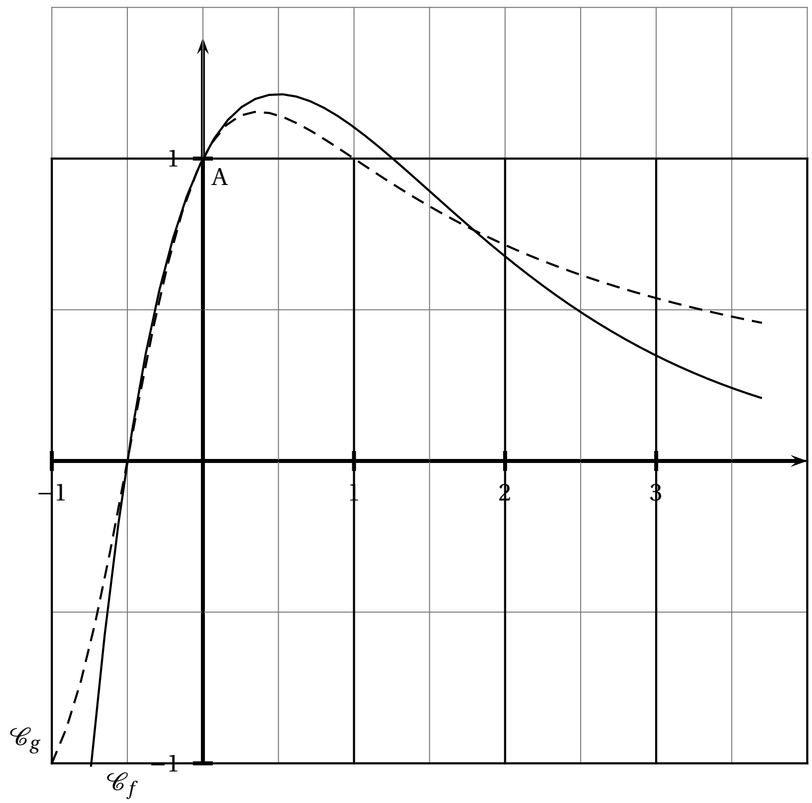
Partie B : étude de la position relative de deux courbes

Ci-dessous sont tracées les courbes représentatives de deux fonctions f et g.
Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

Leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$ sont notées $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

1. Démontrer que les deux courbes passent par le point A de coordonnées (0 ; 1) et admettent en ce point la même tangente.
2. a. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f(x) - g(x) = \dfrac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$ où φ est la fonction étudiée dans la **partie A**.
   b. À l'aide d'un tableau, étudier le signe de $f(x) - g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   c. En déduire la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.



Exercice 3 **4 points**

On se donne deux points distincts A_0 et B_0.
Soit A_1 le milieu du segment $[A_0B_0]$ et B_1 celui de $[A_0A_1]$.
De façon générale, pour tout entier naturel n, on désigne par

A_{n+1} le milieu du segment $[A_nB_n]$ et B_{n+1} celui de $[A_nA_{n+1}]$.

On munit la droite (A_0B_0) du repère $\left(A_0 ; \vec{\imath}\right)$ avec $\vec{\imath} = \overrightarrow{A_0B_0}$.

On note a_n et b_n les abscisses respectives des points A_n et B_n dans le repère $\left(A_0 ; \vec{\imath}\right)$.
On a donc $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$

1. Construire une droite (A_0B_0) en prenant A_0B_0= 10 cm.
   Sur cette droite, placer les points A_1 et B_1, puis les points A_2 et B_2.
   Calculer les valeurs de a_1, b_1, a_2 et b_2.
2. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
3. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = a_n - b_n$ est géométrique.
4. Démontrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $w_n = 3\,a_n + 2\,b_n$ est constante.
5. Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles convergentes ?
   Que peut-on en déduire pour les points A_n et B_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 4 **5 points**

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ d'unité graphique 3 cm. Soit A, B et C les points d'affixes respectives i, $1+\text{i}$ et $-1-\text{i}$.
On appelle f l'application du plan $\mathscr{P}$ privé de A dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z ($z \neq i$) associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{z^2}{\text{i}-z}.$$

1. **a.** Placer les points A, B et C sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice. Que peut-on dire des points B et C ?

   b. Déterminer les affixes des points B′ et C′ images de B et C par l'application f.
   Placer ces points.
2. Déterminer les affixes des points invariants par f (les points M vérifiant $f(M) = M$).
3. L'application f conserve-t-elle l'alignement ? le milieu ?
4. On pose $z = x + \text{i}y$ et $z' = x' + \text{i}y'$ avec x, y, x' et y' réels.

   a. Démontrer que
   $$x' = \frac{-x(x^2+y^2-2y)}{x^2+(1-y)^2}.$$

   b. En déduire l'ensemble $\mathscr{E}$ des points $M(z)$ tels que z' soit un imaginaire pur.
   Représenter l'ensemble $\mathscr{E}$.

Exercice 5 **5 points**

Partie A : questions préliminaires

Les résultats de cette partie pourront être admis et utilisés pour traiter la partie **B**.

On rappelle le théorème suivant du cours :

«Une suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.»

En utilisant ce théorème, démontrer que :

«Une suite croissante et non convergente diverge vers $+\infty$.»

Calculer les réels a et b tels que :

$$(x+1)(x^2+ax+b) = x^3 - x^2 + 2.$$

En déduire les solutions de l'équation : $x = x^2 + \dfrac{2}{x}$

Partie B : étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{2}{u_n}$

Soit f la fonction définie sur $[\,1\,;\,+\infty\,[$ par l'expression :

$$f(x) = x^2 + \frac{2}{x}.$$

On pourra admettre que f est dérivable et croissante sur $[1\,;\,+\infty[$.

1. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
2. Démontrer que si la suite (u_n) converge vers une limite ℓ, alors $f(\ell) = \ell$
3. Donner la conclusion la plus précise possible sur le comportement de la suite (u_n).