Baccalauréat C Dahomey juin 1974

EXERCICE 1

Soit E le corps des entiers modulo 3 : E = $\{\dot{0}\ ;\ \dot{1}\ ;\ \dot{2}\}$; les coefficients intervenant dans cet exercice désignent des éléments de E.

1. **a.** Vérifier que l'on a, pour tout $x \in$ E, $x^3 = x$.

   b. Montrer en raisonnant par récurrence que l'on a pour tout $x \in$ E

$$\begin{array}{lcll} nx^n & = & x & \text{si } n \text{ est impair} \\ x^n & = & x^2 & \text{si } n \text{ est pair, avec } n \in \mathbb{N}^\star \end{array}$$

   c. En déduire que toute fonction polynôme :

$$x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

   de E dans E est égale à une fonction polynôme du deuxième degré :

$$x \longmapsto a^2 + bx + c$$

2. Montrer que l'on a :
   $ax^2 + bx + c = 0$, pour tout $x \in$ E, si et seulement si $a = b = c = 0$. En déduire que l'on a :

$$ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c' \text{ pour tout } x \in \text{E si et seulement si } a = a',\ b = b',\ c = c'.$$

3. **a.** Combien existe-t-il d'applications de E dans E distinctes ?

   b. Combien existe-t-il de fonctions polynômes du deuxième degré de E dans E distinctes ?

   c. En déduire que toute application de E dans E est égale à une fonction polynôme du deuxième degré.

EXERCICE 2

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 8x^3 + 6x - 1.$$

1. Étudier les variations de f. Montrer que f est bijective ; en déduire le nombre de racines de f (c'est-à-dire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$).
2. Montrer que f a une racine x_0 telle que $0 < x_0 < \dfrac{1}{2}$.
3. On considère l'équation dans $\mathbb{C}$

$$8z^3 - 12z^2 + 2 + \text{i} = 0$$

   Montrer que cette équation possède une solution z_0 de la forme
   $z_0 = \dfrac{1}{2} + \lambda\text{i}$, $(\lambda \in \mathbb{R})$ telle que $|z_0| < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

PROBLÈME

On désigne par E un espace vectoriel réel de dimension 2, rapporté à une base $\left(\vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$ et par E un espace affine sur E rapporté à un repère cartésien $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des matrices 2×2 telles que $A\in\mathscr{A}$ si et seulement si $A^2=0$ (matrice nulle).

1. Montrer que toute matrice $A\in\mathscr{A}$ est non inversible.
2. Montrer qu'une matrice A est élément de $\mathscr{A}$ si et seulement si elle est de la forme $A=\begin{pmatrix}a & c\\ b & -a\end{pmatrix}$
3. Soit f un endomorphisme *non nul* de E dont la matrice A relative à $\left(\vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$ est élément de $\mathscr{A}$. avec det A = 0 .
   a. Montrer que le noyau $\mathscr{N}$, ainsi que l'image $\mathscr{J}$ de f sont des droites vectorielles de E.
   b. Montrer que l'on a : $\mathscr{J}\subset\mathscr{N}$; en déduire que $\mathscr{J}=\mathscr{N}$.
4. Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathscr{N}$ non nul, et $\vec{v}$ un vecteur tel que $\left(\vec{u},\ \vec{v}\right)$ soit une base de E ; on pose

$$f\left(\vec{v}\right)=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v},\quad (\lambda,\mu \text{ réels})$$

   a. Montrer que μ est une constante à déterminer.
   b. Écrire la matrice A' de f relative à $\left(\vec{u},\ \vec{v}\right)$.

Partie B

Soit maintenant g un endomorphisme de E de la forme $g=f+1_{\mathrm{E}}$
(1_{E} application identique dans E), où f est un endomorphisme de E tel que

$$f\left(\vec{\imath}\right)=\vec{0}\quad\text{et}\quad f\left(\vec{\jmath}\right)=\lambda\vec{\imath}\ \ (\lambda\in\mathbb{R})\qquad(1)$$

1. **a.** Déterminer $f^2=f\circ f$.
   b. Calculer $g\circ\left(1_{\mathrm{E}}-f\right)$, composée de g et de $1_{\mathrm{E}}-f$.
   c. Montrer que g est un automorphisme de E et déterminer l'automorphisme réciproque g^{-1} de g.
2. On désigne à présent par f_λ l'endomorphisme de E défini par les relations (1), et par g_λ l'endomorphisme $f_\lambda+1_{\mathrm{E}}$. On appelle $\mathscr{G}$ l'ensemble des endomorphismes g_λ lorsque λ varie dans $\mathbb{R}$.
   a. Quelle est la matrice M_λ de g_λ relative à $\left(\vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$?
   b. Déterminer l'endomorphisme $g_\lambda\circ g_\mu$ et en déduire la stabilité de $\mathscr{G}$, pour la loi $\circ$.
   c. Prouver que l'application $\lambda\longmapsto g_\lambda$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R},\ +)$ sur $(\mathscr{G},\ \circ)$.
   d. Montrer que $(\mathscr{G},\ \circ)$ est un groupe commutatif.

Partie C

Soit $h_{\lambda,\,a}$ l'application affine de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{A}$ qui au point M de coordonnées $(x\,;\ y)$ dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$ fait correspondre le point M' de coordonnées $\left(x'\,;\ y'\right)$ telles que

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' &=& x+\lambda y+a\\ y' &=& y\end{array}\right.\qquad(\lambda,\ a \text{ paramètres réels})$$

1. Montrer que $h_{\lambda,\ a}$ est une bijection.

2. Déterminer suivant les valeurs de λ et a l'ensemble des points de $\mathscr{A}$ invariants par $h_{\lambda,\ a}$.

3. Écrire $h_{\lambda,\ a}$ comme composé $t \circ u$ d'une application affine u ayant O comme point double et d'une translation t de direction $\overrightarrow{\imath}$.

Ce produit est-il commutatif ?

4. **a.** Déterminer la composée $h_{\lambda,\ 0} \circ h_{\mu,\ 0}$ des applications $h_{\lambda,\ 0}$ et $h_{\mu,\ 0}$.

En déduire que l'on a :

$$h_{\lambda,\ a} \circ h_{\mu,\ b} = h_{\lambda+\mu,\ a+b}.$$

b. Montrer que l'ensemble $\mathscr{H}$ des applications affines $h_{\lambda,\ a}$ muni de la loi $\circ$, est un groupe commutatif isomorphe à $(\mathbb{R},\ +)$.

N. B. - *Il sera tenu le plus grand compte du soin apporté à la présentation et à la rédaction des copies. En particulier, les notations abusives risquent de ne pas être comprises.*