Durée : 4 heures

∾ Baccalauréat C juin 1975 Dahomey ∾

EXERCICE 1

Soit, dans un espace affine $\mathscr{A}$ trois points non alignés A, B, C. On désigne par G_1 le barycentre des points A, B, C affectés des coefficients 3, 2, -1 respectivement, par G_2 celui des points A, B, C affectés des coefficients 2, 1, 1 respectivement.

1. Calculer $\overrightarrow{G_1G_2}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. En déduire que $G_1 \neq G_2$.
2. À tout point M de $\mathscr{A}$, on fait correspondre le point M_1 tel que :

$$\overrightarrow{MM_1} = 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}.$$

et le point M_2 tel que :

$$\overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.$$

a. Montrer que si M décrit une droite de $\mathscr{A}$, il en est de même de M_1.

b. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ reste constant lorsque M décrit $\mathscr{A}$.

EXERCICE 2

1. Soit $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que l'équation $6y - 3x = a$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$ si et seulement si a est multiple de 3.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes :

$$6y - 3x = 5, \qquad 6y - 3x = 3$$

3. En déduire les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation :

$$(6y - 3x - 4)(2y - 3x + 4) = 1.$$

PROBLÈME

Partie A

Soit E un espace vectoriel de dimension 2, muni d'une base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Soit g l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

a. Montrer que les vecteurs $\vec{\imath}$ et $g\left(\vec{\imath}\right)$ sont linéairement indépendants.

b. Donner la matrice de g dans la base $\left(\overrightarrow{\imath},\ g\left(\overrightarrow{\imath}\right)\right)$.

c. Déterminer $g \circ g - 2g$. En déduire que :

$$g^{-1} = 2\mathrm{I_E} - g.$$

où $\mathrm{I_E}$ désigne l'application identique de E.

2. Soit φ un endomorphisme de E tel qu'il existe deux vecteurs linéairement indépendants $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ tels que : - -

$$\overrightarrow{v} = \varphi\left(\overrightarrow{u}\right)$$

Soit $N = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ la matrice de φ dans la base $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.

a. Calculer a et b.

b. Montrer qu'il existe λ et μ réels, uniques, tels que

$$\varphi^2 + \lambda.\varphi + \mu \mathrm{I_E} = 0_{\mathrm{E}}.$$

$\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$
$\mathrm{I_E}$ application identique de E
0_{E} application nulle de E vers E

3. Soit un endomorphisme de E tel qu'il existe λ et μ réels tels que :

$$\varphi^2 + \lambda.\varphi + \mu \mathrm{I_E} = 0_{\mathrm{E}}.$$

a. Si $\mu \neq 0$, montrer que φ admet une application réciproque φ^{-1}, qu'on déterminera.

b. Si ţ = 0, montrer que φ n'est pas bijective ou que φ est une homothétie vectorielle.

Partie B

Soit F l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$.
Soit E l'ensemble des fonctions f définies par :

$$f(x) = a(x+1)\mathrm{e}^x + b(x-1)\mathrm{e}^x$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de F, dont les fonctions f_1 et f_2 définies par :

$$f_1(x) = (x+1)\mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad f_2(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$$

constituent une base.

2. Soit φ l'application définie sur E par $\varphi(f) = f'$ (f' fonction dérivée de f). Montrer que φ est un endomorphisme de E. Préciser sa matrice dans la base $\left(f_1,\ f_2\right)$.

3. **a.** Montrer que $\varphi\left(f_1\right)$ et f_1 sont linéairement indépendants.

b. En déduire qu'il existe λ et μ, réels, uniques, tels que :

$$\varphi^2(f) + \lambda\varphi(f) + \mu f = 0$$

pour tout $f \in \mathrm{E}$.

c. Déterminer λ et μ.

d. Montrer à l'aide des résultats obtenus en A que φ est bijective et calculer φ^{-1} en fonction de φ.
En déduire une primitive de f_1.

4. **a.** Étudier les variations et tracer la courbe représentative de f_1 dans un repère orthonormé.

   b. Calculer l'aire du domaine intérieur du contour fermé formé par la courbe représentative de f_1, l'axe des abscisses et la droite d'équation : $x = \alpha$,
   $\alpha \in \mathbb{R}$ (2 cas à considérer),.