∾ Baccalauréat C Dakar juin 1980 ∾

EXERCICE 1

1. Linéariser $\sin^3 x$.
2. En intégrant par parties, calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x \sin^3 x\right) \mathrm{d}x.$$

EXERCICE 2

Mamadou et Diallo font cinq parties de pile ou face avec une pièce parfaitement équilibrée ne pouvant retomber sur la tranche ; l'enjeu est de 100 F par partie. (Celui qui perd donne 100 F à celui qui gagne).
Chacun d'eux dispose d'une somme de 400 F. Le règlement s'effectue à la fin de la cinquième partie. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre k de parties gagnées par Mamadou.

1. Quelle double inégalité doit satisfaire k pour que le règlement puisse s'effectuer sans dette de l'un ou l'autre joueur (c'est-à-dire que chaque joueur peut donner immédiatement à l'autre joueur la somme qu'il lui doit ?)
2. **a.** Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   b. Quelle est la probabilité d'un règlement sans dette ?

PROBLÈME

On rappelle qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel est une application linéaire de cet espace vectoriel dans lui-même.

Partie A

Soit P le plan vectoriel euclidien rapporté à la base orthonormée $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$. On considère les endomorphismes Φ de P tels que : $\Phi^3 = \psi$, ψ étant un endomorphisme donné de P $\left(\Phi^3 = \Phi \circ \Phi \circ \Phi\right)$.

1. **a.** Démontrer que Φ est bijectif si, et seulement si, ψ est bijectif.
   b. Soit Ker Φ et Im Φ, respectivement le noyau et l'image de Φ, Ker ψ et Im ψ respectivement le noyau et l'image de ψ, démontrer que

$$\operatorname{Ker}\Phi \subset \operatorname{Ker}\psi, \quad \operatorname{Im}\psi \subset \operatorname{Im}\Phi.$$

2. À tout réel λ non nul on associe l'ensemble E_λ des vecteurs $\overrightarrow{u}$ de P tels que $\psi\left(\overrightarrow{u}\right) = \lambda\overrightarrow{u}$, et à tout réel μ non nul on associe l'ensemble F_μ des vecteurs $\overrightarrow{u}$ de P tels que $\Phi\left(\overrightarrow{u}\right) = \mu\overrightarrow{u}$.
   Démontrer que si $\overrightarrow{u}$ est élément de F_μ alors il existe λ que l'on précisera tel que $\overrightarrow{u}$ appartienne à E_λ.
   Démontrer que E_λ est stable par Φ (c'est-à-dire que pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de E_λ, $\Phi\left(\overrightarrow{u}\right)$ appartient à E_λ.

3. On considère l'endomorphisme Φ de matrice dans la base $\left(\vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

où a et b sont deux réels non tous les deux nuls.

a. Démontrer qu'il existe deux valeurs distinctes de λ que l'on déterminera, λ_1 et λ_2 telles que $\mathrm{E}_\lambda \neq \left\{\vec{0}\right\}$. Déterminer E_{λ_1} et E_{λ_2}. (étudier les cas $b \neq 0$ et $b = 0$).

b. Soit $\overrightarrow{u_1}$ un vecteur non nul de E_{λ_1} et $\overrightarrow{u_2}$ un vecteur non nul de E_{λ_2}). Déterminer la matrice A' de ψ dans la base $\left(\overrightarrow{u_1}\,,\ \overrightarrow{u_2}\right)$.

Calculer la matrice M^3 ($\mathrm{M}^3 = \mathrm{M} \times \mathrm{M} \times \mathrm{M}$) pour $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ $((\alpha,\ \beta) \in \mathbb{R}^2)$.

En déduire qu'il existe au moins un endomorphisme Φ de P solution de $\Phi^3 = \psi$.

c. $a = b = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Vérifier que ψ est une symétrie vectorielle orthogonale. Déterminer λ_1 et λ_2.

Que représentent E_{λ_1} et E_{λ_2} pour cette symétrie ?

Partie B

Soit $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien associé au plan vectoriel P. (YJ est muni du repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$. Soit J la fonction numérique définie par

$$f(x) = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}\sqrt{9 - x^2}.$$

1. Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative C dans $\mathscr{P}$ rapporté au repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$.

2. Construire la courbe C' image de C par la symétrie centrale de centre O ; déterminer une équation de C'. On pose $\Gamma = \mathrm{C} \cup \mathrm{C}'$, démontrer que

$$25x^2 + 25y^2 - 40xy - 81 = 0$$

est une équation de Γ.

3. Soit s la symétrie affine orthogonale associée à la symétrie vectorielle ψ définie à la question A 3. c. et laissant O invariant.

Déterminer une équation de la courbe Γ' image de Γ par s.

Quelle est la nature de Γ' ? En déduire la nature de Γ et préciser ses axes de symétrie.