

Durée : 4 heures

☞ Baccalauréat C Dakar septembre 1969 ☞

EXERCICE 1

Soit α et $\bar{\alpha}$ les racines de l'équation

$$z^2 - 2z + 2 = 0.$$

Pour quelles valeurs de n , entier naturel, α^n et $\bar{\alpha}^n$ sont-ils réels ?

Calculer $\alpha^n + \bar{\alpha}^n$ pour $n = 1$; $n = 4$; $n = 8$.

EXERCICE 2

Soit l'ensemble E des fonctions définies sur \mathbb{R} par

$$f(x) = a \cdot \cos x \cdot \cos 2x + b \cdot \sin x \cdot \sin 2x + c \cdot \cos x.$$

Montrer que E, muni de l'addition des fonctions et de la multiplication des fonctions par un réel, a une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{R} , que tout élément de E se met sous la forme

$$f(x) = A \cdot \cos x + B \cdot \cos px,$$

p étant un entier naturel, et que $f(x)$ n'est nulle pour tout x que si $A = B = 0$.

PROBLÈME

On donne, dans le plan, une droite $x'x$ et un point O sur cette droite. On donne aussi un nombre réel α compris entre 0 et π .

On considère la transformation, notée T_n , qui, à tout point M du plan, fait correspondre le point $M' = T_n(M)$ situé sur la parallèle (Δ) menée de M à $x'x$ et tel que

$$(OM, OM') = n\alpha \pmod{\pi},$$

$n \in \mathbb{Z}$ ensemble des entiers relatifs.

Partie A

1. Quels sont les points qui n'ont pas de transformé à distance finie ? Le transformé d'un point est le point à l'infini sur la droite (Δ) correspondante. Quel est le transformé d'un point de $x'x$?

2. α étant fixé, à $n \in \mathbb{Z}$ correspond la transformation T_n . Soit \mathcal{T} l'ensemble des transformations T_n dans le plan privé de $x'x$.

Montrer que \mathcal{T} est un groupe commutatif pour la composition des transformations.

Soit $\frac{\alpha}{\pi}$ un rationnel : $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{p}{q}$, p et q étant des entiers naturels. Qu'est la transformation T_q ? Montrer qu'en ce cas v a un nombre fini d'éléments. Montrer, en outre, que si $\frac{\alpha}{\pi}$ rationnel, a, sous sa forme irréductible, un dénominateur pair, il existe une transformation T_n involutive.

Application : Dans les cas où

$$\alpha = \frac{3\pi}{8} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

quel est le nombre d'éléments de \mathcal{T} ? Quelle est la transformation involutive ?

Montrer que, si $\frac{\alpha}{\pi}$ est irrationnel, on ne peut avoir

$$T_n = T_{n'} \quad \text{avec} \quad n \neq n'$$

et qu'ainsi \mathcal{T} correspond uniquement à \mathbb{Z} .

Partie B

$x'x$ est l'axe des abscisses et O l'origine d'un repère orthonormé.

Établir les formules de la transformation T_n . Pour cela, on calculera d'abord, en fonction des coordonnées $(x; y)$ de M , y étant différent de zéro, l'affixe, dans le plan complexe xOy , du point transformé de M par la rotation de centre O et d'angle $n\alpha$; puis on en déduira les coordonnées de M' .

Des formules obtenues, déduire celles de la transformation réciproque T_n^{-1} .

Partie C

On prend $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

1. Écrire les formules des transformations T_1, T_2 et de leurs transformations réciproques.
2. Le point M' étant le transformé de M par T_1 trouver l'ensemble, (C), des points M tels que $\overline{MM'} = \lambda$, λ constante donnée. (On formera l'équation de (C) et on donnera aussi une solution géométrique en utilisant le point de (C) transformé en O.)
Préciser les éléments de (C) et de $(C_1) = T_1[(C)]$, transformé de (C) par T_1 .
3. Toujours par T_1 on transforme (C_1) en (C_2) , puis (C_2) en (C_3) . Former, le plus simplement possible, les équations de ces courbes. Donner la nature de la courbe

$$(C_4) = T_1[(C_3)]$$

Partie D

α ayant encore la valeur $\frac{\pi}{4}$, appliquer la transformation T_1 à la droite $x = 1$. (On pourra étudier x comme fonction de y .)

Tracer la courbe (H) obtenue.

Pouvait-on connaître, a priori, l'asymptote parallèle à $x'x$ et la direction de l'asymptote oblique?