∽ Baccalauréat mathématiques élémentaires ∾ Dakar juin 1964

I.

Un point M est animé d'un mouvement vibratoire simple sur un axe $x'\text{O}x$. Le centre de ce mouvement est l'origine. La période du mouvement est $\dfrac{1}{10}$ seconde et, à l'instant initial, le mobile est à 5 cm du centre et a une vitesse de 6 cm/s.
Écrire l'équation du mouvement de ce mobile.

II.

Lieu du centre des cercles tangents à une droite fixe (D) et orthogonaux à un cercle fixe (Γ), dans le cas où (D) est tangent à (Γ).

III.

Dans le plan des axes rectangulaires, Ox, Oy, on considère la courbe (C) représentant la variation de la fonction

$$y = \frac{1}{x^2}.$$

1. Tracer la courbe (C).
   Former l'équation de la tangente à cette courbe au point M dont l'abscisse a une valeur donnée a. Calculer en fonction de a les coordonnées du point K où cette tangente coupe à nouveau la courbe (C).
2. On suppose $a > 1$; soit A le point d'abscisse 1 sur la courbe (C).
   Calculer, en fonction de a, la valeur S de l'aire comprise entre l'arc $\widehat{\text{A}M}$ de la courbe (C) et sa corde.
   Montrer que S est dans un rapport constant avec le produit de la quantité $(a-1)^3$ par l'ordonnée du point M.
3. Montrer que, quels que soient a et λ, la courbe de variation (P) de la fonction

   $$y = \frac{3}{a^2} - \frac{2x}{a^3} + \lambda(x-a)^2$$

   est tangente à la courbe (C) au point M d'abscisse a.
   Former l'équation du second degré ayant pour racines les abscisses des points, M', M'', où se coupent, en dehors du point M, les courbes (P) et (C).
   Dessiner sur une même figure la courbe (C) et la courbe (P) obtenues pour $a = 1$, $\lambda = -1$.