

∞ Baccalauréat Dakar juin 1966 ∞
Mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

Résoudre l'équation

$$z^7 = i - \sqrt{3} \quad (i^2 = -1).$$

EXERCICE 2

Étudier les variations de la fonction

$$y = 2x\sqrt{5-2x}$$

et construire son graphe.

EXERCICE 3

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(x'Ox, y'Oy)$ et l'application $\mathcal{A}$ qui, à tout point M de coordonnées x et y ($y \neq 0$), fait correspondre le point $M_1 = \mathcal{A}(M)$ de coordonnées x_1 et y_1 définies par

$$x_1 = x \quad \text{et} \quad y_1 = \frac{x^2}{y}.$$

1.
 - a. On considère un point M d'abscisse non nulle et M_1 son image par $\mathcal{A}$. Déterminer $\mathcal{A}(M_1)$.
 - b. Que devient le point $M_1 = \mathcal{A}(M)$ lorsque y tend vers 0, étant donné non nul?
 - c. On posera, par définition, que l'image du point M de coordonnées $x \neq 0$ et $y = 0$ est le point « à l'infini » de la parallèle à Oy d'abscisse x et que l'image de l'origine, O , des axes de coordonnées est le point O .
Trouver l'ensemble (D) des points doubles de $\mathcal{A}$ et une définition géométrique de $\mathcal{A}$ à partir de (D) .
2.
 - a. Quelle est l'équation de (d_1) image par $\mathcal{A}$ de la droite (d) d'équation $ux + vy + h = 0$?
Examiner chacun des cas particuliers $v = 0$ ($h \neq 0$) et $h = 0$ ($v \neq 0$); donner, dans ce dernier cas, une construction géométrique de (d_1) .
Quelle est l'image par $\mathcal{A}$ de la droite $y'Oy$?
 - b. Étudier la nature de (d_1) dans le cas $vh \neq 0$ et préciser ses éléments remarquables.
3. Soit (C) le graphe d'une fonction $y = f(x)$, M un point de (C) , de coordonnées $(\alpha; \beta)$. Soit (T) la tangente en M à (C) et m sa pente. Soit M_1 , de coordonnées (α, β_1) l'image de M par $\mathcal{A}$, et (Δ) la tangente en M_1 à (C_1) , transformée de (C) . On note μ la pente de (d) .

- a. Calculer μ en fonction de α, β, m (on considérera y_1 comme une fonction composée de x par l'intermédiaire de y), puis les ordonnées à l'origine, b et p , des droites (T) et (Δ).
- b. Vérifier l'égalité $\frac{b}{p} = -\frac{\beta}{\beta_1}$ et en déduire une construction simple de (Δ).