Baccalauréat mathématiques élémentaires Dakar juin 1963

EXERCICE 1

Étudier les variations de la fonction

$$y = \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x - 5.$$

Construire la courbe représentative ; montrer qu'elle admet un centre de symétrie ; donner l'équation de la tangente en ce point.

EXERCICE 2

Déterminer les solutions de l'équation trigonométrique

$$\sin\frac{x}{2} - \sqrt{3}\cos\frac{x}{2} = 2\sin\frac{\pi}{5}$$

comprises entre -10000 °et $+10000$ °. (L'usage des tables n'est pas nécessaire.)

EXERCICE 3

Soient un repère cartésien orthonormé, $x'\text{O}x, y'\text{O}y$, une longueur donnée a et le point fixe A, sur l'axe $x'\text{O}x$, d'abscisse $\dfrac{4a}{3}$;.

M étant un point quelconque de l'axe $y'\text{O}y$, on désigne par (M) le cercle de centre M et de rayon égal à $\dfrac{1}{2}$AM.

1. I étant le conjugué de A par rapport au cercle (M) situé sur la droite AM, quel est l'ensemble des points I quand M décrit l'axe $y'\text{O}y$?
   Soit D la parallèle à $x'\text{O}x$ issue de I ; elle coupe (M) en deux points, P_1 et P_2. On appelle u l'ordonnée de M.
   Donner, en fonction de u, l'équation du cercle (M), l'équation de la droite D, les coordonnées des points P_1 et P_2.
   En déduire l'équation de la courbe (C) décrite par les deux points P_1 et P_2 lorsque M décrit l'axe $y'\text{O}y$.
   On trouvera
   $$y^2 - 3x^2 + \frac{4a^2}{3} = 0.$$
2. Construire cette courbe (C) et préciser ses éléments (sommets, foyers, directrices, asymptotes).
   Montrer que la courbe (C) est tangente au cercle (M) aux deux points correspondants, P_1 et P_2.
3. Soit (M$'$) le cercle inverse du cercle (M) dans l'inversion de pôle A et de puissance $2a^2$; on appelle M$'$ son centre.
   Quel est l'ensemble des points M$'$ quand M décrit $y'\text{O}y$?
   Calculer le rayon de (M$'$) en fonction de AM$'$.
   Montrer que les cercles (M$'$) restent orthogonaux à un cercle fixe, que l'on précisera, quand M décrit $y'\text{O}y$.
   Préciser la position des points P'_1 et P'_2 inverses des points P_1 et P_2.
   Quelle est, en P'_1 (ou P'_2), la tangente à la courbe (C$'$) décrite par ces deux points quand M décrit $y'\text{O}y$?

Montrer que la droite $P'_1P'_2$ passe par un point fixe.
En déduire que la courbe (C$'$) se conserve dans une inversion, que l'on précisera.
La droite AP'_1 (ou AP'_2 recoupe la courbe décrite par M$'$ en h'_1 (ou h'_2). Montrer que la longueur $P'_1h'_1$ (ou $P'_2h'_2$) est constante et égale à a.
(Cette propriété pourrait permettre de construire (C$'$) point par point.)