Baccalauréat C Dakar septembre 1966
Mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

Donner les équations paramétriques de la droite passant par les points A$(+1\,;\ +2\,;\ +3)$ et B $(+\,3\,;+\,2\,;+\,1)$.

Trouver les coordonnées des points M de cette droite tels que on ait $\dfrac{\text{MA}}{\text{MB}} = 3$.

EXERCICE 2

Utiliser le développement de $(\cos x + \mathrm{i}\sin x)^5$ pour exprimer $\cos 5x$ en fonction de $\cos x$.

EXERCICE 3

Soit un cercle fixe (O), de centre O, de rayon R, un point fixe A (OA $= a$) et un nombre α donné tel que l'on ait $0 < 2\alpha < \pi$.

On appelle cercle (C) tout cercle ayant son centre, C, sur (O) et vu de A sous l'angle 2α. On pose

$$\left(\overrightarrow{\text{OA}}\,,\ \overrightarrow{\text{OC}}\right) = \omega.$$

1. On désigne par T et T$'$ les points de contact des tangentes à (C) issues de A $\left(\widehat{\text{TAT}'} = 2\alpha\right)$. Calculer

   les rapports $\dfrac{\text{AT}}{\text{AC}}$ et $\dfrac{\text{AT'-}'}{\text{AC}'}$.

   En déduire les ensembles $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$, décrits par T et T$'$ quand C décrit (O).

   $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ peuvent-ils être des cercles (C) ? Discussion.

   Construire $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ pour $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ et $a = 2R$.
2. Soit M le point de (C) tel que $\left(\overrightarrow{\text{CA}}\,,\overrightarrow{\text{CM}}\right) = \varphi$, où φ est une valeur donnée vérifiant $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

   Montrer que l'ensemble, $\mathcal{M}$, décrit par M est le transformé de (O) par une similitude, dont on déterminera les éléments en fonction de α et φ.
3. Le point C décrivant toujours le cercle (O), trouver l'ensemble, $\mathcal{I}$, décrit par le milieu, I, de TT$'$ et l'enveloppe (Γ) de la droite TT$'$.

   Discuter la nature de (Γ) selon les valeurs du rapport $\dfrac{a}{R}$.

   Préciser, dans chaque cas, ses éléments.

   Construire (Γ) pour $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ et $a = 2R$.
4. On construit maintenant, dans le plan du cercle (O), le repère orthonormé $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$ de telle manière que les coordonnées du point A soient $(a\,;\,0)$. Soit K la projection orthogonale de O sur l'axe radical Δ de (O) et (C).

   Calculer, en fonction de ω, le nombre p tel que $\overrightarrow{\text{OK}} = p\overrightarrow{\text{OC}}$.

   En déduire l'équation de Δ.

   Exprimer la distance à Δ d'un point S quelconque de l'axe $x'x$ ($\overline{\text{OS}} = s$) et montrer qu'il existe une valeur de s pour laquelle cette distance ne dépend pas de ω.

   En déduire l'enveloppe de Δ.

   Peut-on choisir $\dfrac{a}{R}$ pour que Δ passe par un point fixe ?