

☞ Baccalauréat C Dakar septembre 1966 ☞
Mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

Donner les équations paramétriques de la droite passant par les points A(+1 ; +2 ; +3) et B (+ 3; + 2; + 1).

Trouver les coordonnées des points M de cette droite tels que on ait $\frac{MA}{MB} = 3$.

EXERCICE 2

Utiliser le développement de $(\cos x + i \sin x)^5$ pour exprimer $\cos 5x$ en fonction de $\cos x$.

EXERCICE 3

Soit un cercle fixe (O), de centre O, de rayon R, un point fixe A ($OA = a$) et un nombre α donné tel que l'on ait $0 < 2\alpha < \pi$.

On appelle cercle (C) tout cercle ayant son centre, C, sur (O) et vu de A sous l'angle 2α . On pose

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \omega.$$

1. On désigne par T et T' les points de contact des tangentes à (C) issues de A ($\widehat{TAT'} = 2\alpha$).

Calculer

les rapports $\frac{AT}{AC}$ et $\frac{AT'}{AC'}$.

En déduire les ensembles $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$, décrits par T et T' quand C décrit (O).

$\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ peuvent-ils être des cercles (C)? Discussion.

Construire $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ pour $\alpha = \frac{\pi}{6}$ et $a = 2R$.

2. Soit M le point de (C) tel que $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM}) = \varphi$, où φ est une valeur donnée vérifiant $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Montrer que l'ensemble, $\mathcal{M}$, décrit par M est le transformé de (O) par une similitude, dont on déterminera les éléments en fonction de α et φ .

3. Le point C décrivant toujours le cercle (O), trouver l'ensemble, $\mathcal{J}$, décrit par le milieu, I, de TT' et l'enveloppe (Γ) de la droite TT'.

Discuter la nature de (Γ) selon les valeurs du rapport $\frac{a}{R}$.

Préciser, dans chaque cas, ses éléments.

Construire (Γ) pour $\alpha = \frac{\pi}{6}$ et $a = 2R$.

4. On construit maintenant, dans le plan du cercle (O), le repère orthonormé $x'Ox, y'Oy$ de telle manière que les coordonnées du point A soient $(a ; 0)$. Soit K la projection orthogonale de O sur l'axe radical Δ de (O) et (C).

Calculer, en fonction de ω , le nombre p tel que $\overrightarrow{OK} = p \overrightarrow{OC}$.

En déduire l'équation de Δ .

Exprimer la distance à Δ d'un point S quelconque de l'axe $x'x$ ($\overline{OS} = s$) et montrer qu'il existe une valeur de s pour laquelle cette distance ne dépend pas de ω .

En déduire l'enveloppe de Δ .

Peut-on choisir $\frac{a}{R}$ pour que Δ passe par un point fixe?