Durée : 4 heures

Baccalauréat Dakar juin 1965

Série mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

Dans le plan complexe on désigne par M l'image du nombre complexe z.
Quel est l'ensemble des points M tels que $(z-a)(z-b)$ soit réel ? (a et b sont deux nombres complexes donnés.)

EXERCICE 2

Construire un cercle (γ) tangent à un cercle donné, (C), et à une droite donnée, (D), en un point donné, A, de cette droite.

EXERCICE 3

Soit (γ) la courbe d'équation cartésienne

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

par rapport à un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$; a et b sont deux longueurs données.

1. À partir de la représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& a\cos t,\\ y &=& b\sin t\end{array}\right.$$

de (γ), montrer que l'équation cartésienne de la tangente en un point $M_0\left(x_0\ ;\ y_0\right)$ de (γ) est

$$\frac{m_0 x}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}-1=0.$$

2. À tout point $M_0\left(x_0\ ;\ y_0\right)$ du plan et distinct de O, on fait correspondre la droite (m_0) d'équation

$$\frac{m_0 x}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}-1=0.$$

Vérifier que, lorsque $a=b$, la droite (m_0) est la polaire de M_0 par rapport au cercle (γ).

3. Montrer que l'application $M\longmapsto (m_0)$ est une application biunivoque (ou une bijection) de l'ensemble des points du plan distincts de O sur l'ensemble des droites ne passant pas par O.
Pour toute droite (m_0) d'équation

$$ux+vy+h=0$$

ne passant pas par O, donner les coordonnées du point M_0 correspondant.

4. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que (m_0) soit tangente à (γ) est que $M_0\in(\gamma)$.

En déduire qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la droite d'équation $ux+vy+h=0$ soit tangente à (γ) est que

$$a^2u^2+b^2v^2-h^2=0.$$

5. Utiliser cette dernière relation pour discuter le nombre de tangentes à (γ) issues d'un point $P(\lambda\ ;\ \mu)$ donné (on pourra former l'équation donnant les pentes de ces tangentes).

En utilisant cette même relation trouver l'ensemble des points d'où l'on peut mener à (γ) deux tangentes perpendiculaires.

6. On suppose que M_0 décrit une droite (d) donnée ne passant pas par O. Montrer que (m_0) passe par un point fixe.

Que devient ce résultat lorsque (d) passe par O ?