

☺ Dakar juin 1967 ☺
Baccalauréat mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

Démontrer que $2^{2n} + 2$ est divisible par 3 quel que soit l'entier naturel n .
En déduire, ou démontrer directement, que

$$2^{2n} + 15n - 1$$

est un multiple de 9. (On pourra raisonner par récurrence.)

EXERCICE 2

Simplifier l'écriture du nombre complexe

$$Z = \frac{(i-1)^4}{(i+1)^5}.$$

Préciser le module et l'argument.

EXERCICE 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (R) d'axes $x'Ox$, $y'Oy$, de vecteurs unitaires \vec{i} et \vec{j} .
Soit T la transformation ponctuelle qui, à tout point M de coordonnées x, y [on écrira $M(x; y)$], fait correspondre le point $M'(x'; y')$ tel que

$$\begin{cases} x' &= 2x + 3y, \\ y' &= 3x + 10y. \end{cases}$$

1. Montrer que T admet une transformation réciproque, T^{-1} . Existe-t-il des points doubles? T est-elle involutive?
2. Trouver la transformée, (D') , d'une droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$ par la transformation T .
Calculer le coefficient directeur, p' , de (D') en fonction de celui, p , de (D) .
On pose $S = (D) \cap (D')$. Déterminer l'ensemble des points S quand (D) varie.
3. Démontrer que, si deux points particuliers, M et M' , se correspondent dans une homothétie de centre O et de rapport k , k est solution de l'équation

$$k^2 - 12k + 11 = 0.$$

Calculer la valeur de k ; en déduire que M et M' appartiennent à l'une ou l'autre de deux droites, dont on déterminera l'angle.

4. À chaque point du plan, de coordonnées $(x; y)$, on associe le vecteur \vec{V} de composantes scalaires $(x; y)$ par rapport à (R) [on écrira $\vec{V}(x; y)$].
Étant donné deux vecteurs, $\vec{V}_1(x_1; y_1)$ et $\vec{V}_2(x_2; y_2)$, montrer que l'expression

$$F(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = 2x_1x_2 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 10y_1y_2$$

satisfait aux conditions (1), (2), (3) suivantes :

$$\begin{aligned} (1) \quad F(\vec{V}_1, \vec{V}_2) &= F(\vec{W}_1, \vec{V}_2) + F(\vec{W}'_1, \vec{V}_2) \quad \text{si } \vec{V}_1 = \vec{W}_1 + \vec{W}'_1 \\ (2) \quad F(\vec{V}_1, \vec{V}_2) &= F(\vec{V}_1, \vec{W}_2) + F(\vec{V}_1, \vec{W}'_2) \quad \text{si } \vec{V}_2 = \vec{W}_2 + \vec{W}'_2 \end{aligned}$$

On posera, pour cela, $\vec{W}_1(\alpha_1, \beta_1)$, $\vec{W}'_1(\alpha'_1, \beta'_1)$, $\vec{W}_2(\alpha_2, \beta_2)$, $\vec{W}'_2(\alpha'_2, \beta'_2)$.
Si l et m sont des constantes,

$$(3) \quad F(l\vec{V}_1, m\vec{V}_2) = lmF(\vec{V}_1, \vec{V}_2).$$

Que peut-on dire de $F(\vec{W}_1, \vec{W}_2)$ si \vec{W}_1 et \vec{W}_2 sont respectivement parallèles aux vecteurs $\vec{u}(+3; -1)$ et $\vec{v}(+1; +3)$. Par suite, si l'on pose

$$\begin{aligned} \vec{V}_1 &= x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} = X_1 \vec{u} + Y_1 \vec{v}, \\ \vec{V}_2 &= x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} = X_2 \vec{u} + Y_2 \vec{v}, \end{aligned}$$

calculer $F(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$ en fonction de X_1, X_2, Y_1, Y_2 et $F(\vec{V}_1, \vec{V}_1)$ en fonction de X_1 et Y_1 .

5. Trouver l'ensemble, (E), des points $M(x; y)$, de transformé $M'(x'; y')$ par T , tels que $\vec{OM} \cdot \vec{OM}' = k^2$?

Pour cela, on formera l'équation de (E) dans le repère (R), puis dans le repère (R'), de même origine, de base $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} + 3\vec{j}$.