∽ Baccalauréat Dakar septembre 1967 ∾

SÉRIE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Exercice 1

Un nombre complexe z vérifie la relation

$$(E) \qquad z^2(1-\mathrm{i}) - 10z + 13(1+\mathrm{i}) = 0.$$

1. Trouver une relation, (E'), équivalente à (E), telle que le coefficient de z^2 soit 1.
2. Montrer que la relation (E') peut se mettre sous la forme $(z+\alpha)^2 - \beta^2 = 0$, α et β étant deux nombres complexes, et calculer z_1 et z_2, valeurs de z vérifiant (E) ou (E').
3. Soit M_1 et M_2 les images de z_1 et z_2. Calculer $\mathrm{O}M_1$, $\mathrm{O}M_2$ et tg $M_1\mathrm{O}M_2$.

Exercice 2

Soit un cercle (C), de diamètre OA. On considère la transformation ponctuelle (T) qui, à tout point M du plan du cercle, associe le point M' conjugué de M par rapport à O et P, P étant le deuxième point d'intersection de $\mathrm{O}M$ et de (C).

Partie A

1. (T) est-elle involutive ? Pourquoi ?
2. Quels sont les points doubles de (T) ?
3. Quels sont les points M dont le transformé esL rejeté à l'infini ?
4. Y a-t-il un point dont le transformé est indéterminé et quelle est la droite dont tous les points ont même transformé ?
5. Quelles sont les droites globalement invariantes ?

Partie B

Soit I le centre du cercle (C), de rayon unité ; on pose $\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \overrightarrow{\imath}$.
À tout point M du plan on associe le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ de la droite $\mathrm{O}M$, tel que $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{u}\right) = \varphi$, $0 \leqslant \varphi < \pi$ et $\overrightarrow{\mathrm{O}M} = \rho\overrightarrow{u}$ (ρ positif ou négatif).

1. Quelle relation a-t-on entre ρ et φ pour les points de (C) ?
2. Exprimer ρ_1 et φ_1 associés à M_1 transformé de M, en fonction de ρ et φ et retrouver ainsi les résultats b. et c. de la partie A.
3. Soit (Γ) l'ensemble des points caractérisés par la relation $\rho = a\cos\varphi$ $(a \neq 1)$. Caractériser (Γ) et son transformé, (Γ_1).
   À quelle transformation classique (T) est-elle équivalente pour l'ensemble (Γ) ?
4. Soit (D) la droite perpendiculaire à OI au point H tel que $\overrightarrow{\mathrm{O}H} = a.\overrightarrow{\imath}$. Quelle relation entre ρ et φ a-t-on pour les points M de (D) ?
   Quelle relation entre ρ_1 et φ_1 a-t-on pour les points M_1, transformés des points M de (D) ?
   Pour quelles valeurs de a le nombre ρ_1 peut-il devenir infini ? Devient-il infini pour $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$?

Partie C

Soit $(x~;~y), \left(x_1~;~y_1\right)$ les coordonnées de M et M_1 relativement à un repère orthonormé $x'\mathrm{O}x,~y'\mathrm{O}y$ tel que $\overrightarrow{\imath}$ soit le vecteur unitaire de $x'\mathrm{O}x$.

1. Calculer x_1 et y_1 en fonction de x et y [on pourra utiliser le paragraphe B, b.].
2. On suppose que M décrit la droite (D) d'équation $x = a$. Trouver l'ensemble (D_1), transformé de (D), et étudier sa nature suivant les valeurs de a. [Pour cela, il sera avantageux d'exprimer x en fonction de x_1 et y_1. Pour quelle valeur de a (D_1) est-il une hyperbole équilatère ?

N. B. Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.