Baccalauréat C Départements d'Outre-Mer juin 1973

EXERCICE 1

Un nombre entier naturel N s'écrit $\overline{abc}0$ en base 5, et $\overline{abc}$ en base 12, où a, b et c sont des entiers tels que $0 < a < 5,\ 0 \leqslant b < 5,\ 0 \leqslant c < 5$.
Déterminer les entiers a, b, c et N. (On pourra utiliser la congruence modulo 4.)

EXERCICE 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(-4-2\text{i})z^2+(7-\text{i})z+1+3\text{i}=0.$$

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de chaque racine.

EXERCICE 3

Soit E l'ensemble des fonctions numériques définies sur l'intervalle $]-2\ ;\ +2[$. On rappelle que E, muni de l'addition et de la multiplication externe par les réels, ainsi définies :

$$\begin{array}{lll} f+g: & x \longmapsto f(x)+g(x) & \text{pour tout}(f,\ g) \in \text{E} \times \text{E}, \\ \lambda f: & x \longmapsto \lambda f(x) & \text{pour tout}(\lambda,\ f) \in \mathbb{R} \times \text{E}, \end{array}$$

est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1. Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par les deux fonctions f_1 et f_2 ainsi définies :

$$\text{pour tout } x \in]-2\ ;\ +2[, \left\{\begin{array}{lll} f_1(x) & = & \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}} \\ f_2(X) & = & \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}} \end{array}\right.$$

   Montrer que $\left(f_1,\ f_2\right)$ est une base de F.

2. Soit P le plan vectoriel euclidien orienté et soit $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ une base orthonormée directe de P.

   On désigne par T l'ensemble des transformations orthogonales de P, dont la matrice $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, relativement à la base $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$, vérifie $(a-b)^2=1$.
   Déterminer tous les éléments de T (préciser les angles de rotation et les axes de symétrie).

3. Soit φ l'endomorphisme de F, dont la matrice par rapport à la base v est la matrice A, représentant la rotation vectorielle d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$ dans P, par rapport à la base $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.
   Déterminer l'image par φ de la fonction $g=2f_1+f_2$.
   Étudier la fonction numérique $x \longmapsto f(x), = \sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$.
   Tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
   En déduire le tracé de la courbe (C) d'équation

$$x\left(y^2+1\right)+2\left(y^2-1\right)=0.$$

   Étudier la limite de $\dfrac{f(x)}{x-2}$ lorsque x tend vers 2.
   La courbe (C) possède-t-elle une tangente au point $(2\,;0)$?

4. Écrire l'équation de la tangente (D) à la courbe (C), au point d'abscisse $x = 1$ et d'ordonnée $y > 0$.
   Déterminer l'intersection de (C) et de la droite (D).
   Préciser la position de la courbe (C) par rapport à la droite (D).