

## ∞ Baccalauréat C Départements d'Outre-Mer juin 1971 ∞

### EXERCICE 1

On rappelle qu'une fonction continue sur  $[a ; b]$  ne peut prendre deux valeurs distinctes  $A$  et  $B$  sans prendre toutes les valeurs intermédiaires.

1. Montrer qu'une fonction  $f$ , continue et strictement décroissante sur un intervalle fermé  $[a ; b]$ , définit une bijection de  $[a ; b]$  sur  $[f(b) ; f(a)]$ .
2. Appliquer ce résultat à la fonction  $x \mapsto \frac{e^x}{x}$  pour montrer que l'équation  $e^x = 3x$  possède une racine, et une seule, comprise entre  $\frac{1}{2}$  et 1.  
Valeurs approchées :  $e \approx 2,718$ ,  $e^{\frac{1}{2}} \approx 1,648$ .

### EXERCICE 2

1. Quels sont les nombres entiers naturels dont le carré divise 468?
2. Résoudre, dans l'ensemble des entiers naturels, l'équation  $x^2(2x+1) = 468$ .
3. Existe-t-il un nombre  $b$  tel que le nombre qui s'écrit 941 dans le système décimal s'écrive  $\overline{4205}$  dans la numération de base  $b$ ?

### PROBLÈME

Le plan complexe (P) est rapporté au repère orthonormé  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  noté  $\mathcal{R}$ .

On considère la transformation ponctuelle,  $T$ , qui à tout point  $m$  du plan fait correspondre le point  $M$  tel que les affixes  $z$  et  $Z$  de  $m$  et  $M$  vérifient la relation  $Z = z^2 - z$ .

#### Partie A

1. Quels sont les points doubles de  $T$ ?
2. Quels sont les points ayant pour correspondant
  - a. le point A d'affixe 2,
  - b. le point B d'affixe  $-1 + i$ ?
3. La transformation  $T$  est-elle
  - a. injective,
  - b. surjective?
4. Étudier la disposition de deux points  $m_1$  et  $m_2$  ayant par  $T$  le même correspondant.  
Quels sont les points de (P) qui ont un correspondant unique par  $T$ ?

#### Partie B

1. Calculer les coordonnées  $X$  et  $Y$  de  $M$  en fonction des coordonnées  $x$  et  $y$  de  $m$ .
2. Quelle est l'image de la droite d'équation  $y = 0$ ?
3. Quelle est l'image réciproque de la droite d'équation  $y = 0$ ?
4. Quelle est l'image de la droite d'équation  $x = 0$ ?  
Représenter cette image.

5. Quelle est l'image de la droite d'équation  $y = x$ ?  
Représenter cette image.
6. Quelle est l'image de la droite d'équation  $y = x - 1$ ?  
Ce résultat pouvait-il se déduire sans autre calcul de certains résultats précédents?

**Partie C**

On se propose de rechercher l'image ( $\gamma$ ) de la droite d'équation  $y = 2x$ .

1. Exprimer  $X$  et  $Y$ , coordonnées d'un point  $M$  de ( $\gamma$ ), en fonction de l'abscisse  $x$  du point  $m$  correspondant.
2. On donne les vecteurs

$$\vec{u} = 4\vec{i} + 3\vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{v} = -3\vec{i} + 4\vec{j}.$$

On désigne par  $\mathcal{R}'$  le repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

- a.  $\mathcal{R}'$  est-il orthonormé?
- b.  $X$  et  $Y$  étant les coordonnées de  $M$  dans  $\mathcal{R}$ ,  $X'$  et  $Y'$  celles de ce même point dans  $\mathcal{R}'$ , déterminer  $X$  et  $Y$  en fonction de  $X'$  et de  $Y'$ .

En déduire que, pour tout point de ( $\gamma$ ), on a

$$\begin{cases} 4X' - 3Y' &= -3x^2 - x, \\ 3X' + 4Y' &= 4x^2 - 2x. \end{cases}$$

3. Déterminer l'équation cartésienne de ( $\gamma$ ) dans  $\mathcal{R}'$ . En déduire sa nature, son axe de symétrie et son sommet.  
Représenter graphiquement ( $\gamma$ ) dans le repère  $\mathcal{R}$ .