

Durée : 4 heures

❧ Baccalauréat C Départements d'Outremer juin 1972 ❧

EXERCICE 1

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

- (1)  $\text{Log}(x+3) + \text{Log}(x+2) = \text{Log}(x+11)$ ,
- (2)  $\text{Log}(x^2 + 5x + 6) = \text{Log}(x+11)$ ,
- (3)  $\text{Log}(-x-2) = \text{Log}\left(\frac{-x-11}{x+3}\right)$ ,
- (4)  $\text{Log}(x+2) = \text{Log}(-x-11) - \text{Log}(x+3)$ .

EXERCICE 2

Soit  $N$  un entier naturel dont la décomposition en facteurs premiers est  $a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma$ .

1. Démontrer que la somme  $\sigma(N)$  des diviseurs de  $N$  est

$$\sigma(N) = (1 + a + \dots + a^\alpha) (1 + b + \dots + b^\beta) (1 + c + \dots + c^\gamma).$$

Appliquer ce résultat au nombre 175.

2. Un entier,  $N$ , est dit parfait si

$$\sigma(N) = 2N.$$

Montrer que si  $2^n - 1$  est premier, l'entier  $N = 2^{n-1} (2^n - 1)$  est parfait.

EXERCICE 2

Ce problème a pour but l'étude de la famille de courbes  $(C_m)$  d'équation

$$(m^2 - 1)y^2 - 2mxy + x^2 + 2y + 3 = 0.$$

Le repère initial  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  est un repère orthonormé.

**Ce problème se décompose en trois parties A, B et C indépendantes et pouvant être traitées par le candidat dans l'ordre qui lui conviendra. Toutefois, il serait bon de commencer par A.**

**Partie A**

1. *Cas particuliers* :  $m = +1$  et  $m = -1$ .

Écrire les équations de  $(C_1)$  et de  $(C_{-1})$  sous la forme

$$y = ax + b + \frac{c}{mx-1}$$

( $a, b$  et  $c$  étant des nombres réels à déterminer).

Étudier succinctement et représenter sur un même graphique, tracé dans le plan rapporté au repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , les courbes  $(C_1)$  et  $(C_{-1})$ . (On pourra choisir comme unité de longueur 2 cm et l'on emploiera des couleurs distinctes pour chacune des courbes.)

**2. Étude du cas :  $m = 0$** 

Démontrer qu'il existe un repère  $(\omega, \vec{i}, \vec{j})$  par rapport auquel la courbe  $(C_0)$  a une équation de la forme  $y^2 = 2x^2$

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

Tracer la courbe  $(C_0)$ .

**3. Démontrer que les trois centres de symétrie,  $\Omega_{-1}, \Omega_0$  et  $\Omega_1$ , des courbes  $(C_{-1}), (C_0)$  et  $(C_1)$  appartiennent à une droite  $(D)$ , dont on précisera l'équation par rapport au repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .****Partie B**

On considère maintenant  $(O, \vec{I}, \vec{J})$  défini par

$$\vec{I} = \vec{i} \quad \text{et} \quad \vec{J} = m\vec{i} + \vec{j}.$$

Démontrer que, pour tout  $m$ ,  $(O, \vec{I}, \vec{J})$  peut être pris comme nouveau repère.

On désigne par  $X$  et par  $Y$  les nouvelles coordonnées d'un point  $M$  de  $(C_m)$  dans le repère  $(O, \vec{I}, \vec{J})$ . Quelle forme l'équation de  $(C_m)$  prend-elle alors, dans ce nouveau repère?

En s'inspirant du A 2. en déduire la nature de la famille des courbes  $(C_m)$ . Quelles sont alors les coordonnées de leur centre de symétrie,  $\Omega_m$  dans ce nouveau repère?

Démontrer que  $\Omega_m$  appartient à la droite  $(D)$  (considérée dans la question 3. du A.

**Partie C**

Soit  $O'_m$  le point de coordonnées  $(m; 1)$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

**1. Former l'équation de la famille  $(C_m)$  dans le repère  $(O'_m, \vec{i}, \vec{j})$ .****2. Vérifier que  $(C_{\sqrt{\frac{3}{2}}})$  a pour équation, dans le repère  $(O'_{\sqrt{\frac{3}{2}}}, \vec{i}, \vec{j})$** 

$$Y^2 - 2\sqrt{6}XY + 2X^2 + 8 = 0.$$

**3. Soit  $f$  l'application qui, à tout point  $M$  du plan de coordonnées  $(x; y)$ , dans le repère  $(O'_{\sqrt{\frac{3}{2}}}, \vec{i}, \vec{j})$ , fait correspondre le point  $M'$  de coordonnées  $(x'; y')$  telles que**

$$\begin{cases} x' &= 2x - \sqrt{6}y, \\ y' &= -\sqrt{6}x + y. \end{cases}$$

Soit  $(D_1)$  la droite définie par le point  $O'_{\sqrt{\frac{3}{2}}}$  et le point  $U_1$  de coordonnées  $(\sqrt{\frac{2}{5}}; \sqrt{\frac{3}{5}})$  et  $(D_2)$  la

droite définie par le point  $O'_{\sqrt{\frac{3}{2}}}$  et le point  $U_2$  de coordonnées  $(-\sqrt{\frac{3}{5}}; \sqrt{\frac{2}{5}})$  Démontrer que les droites  $(D_1)$  et  $(D_2)$  sont globalement invariantes par l'application  $f$ .

Soit

$$\vec{V}_1 = \overrightarrow{O'_{\sqrt{\frac{3}{2}}}U_1} \quad \text{et} \quad \vec{V}_2 = \overrightarrow{O'_{\sqrt{\frac{3}{2}}}U_2};$$

former l'équation de  $(C_{\sqrt{\frac{3}{2}}})$  dans le repère  $(O'_{\sqrt{\frac{3}{2}}}, \vec{V}_1, \vec{V}_2)$ .