Durée : 4 heures

Baccalauréat C Bordeaux juin 1970

EXERCICE 1

1. Soit la fonction f de la variable réelle x, définie par

$$y = f(x) = x\sqrt{3-x}.$$

Déterminer son sens de variation et construire la courbe représentative, (C), dans le repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$.

2. Vérifier que la fonction F définie par

$$F(x) = \left(\frac{2}{5}x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{12}{5}\right)\sqrt{13-x}$$

est une primitive de la fonction f.

Calculer l'aire de la surface limitée par l'axe $x'Ox$, la courbe (C) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 3$.

EXERCICE 2

On considère la fraction $\dfrac{n+9}{n-6}$, où n est un entier supérieur à 6.

1. Trouver les valeurs de n pour lesquelles la fraction est équivalente à un entier.

2. Trouver les valeurs de n pour lesquelles la fraction est réductible.

EXERCICE 3

L'étude proposée concerne l'ensemble $\mathscr{S}$ constitué, d'une part, des similitudes planes directes de centre O donné, de rapport k positif et d'angle θ, et, d'autre part, de la transformation ponctuelle qui, à tout point M du plan, associe le point O, transformation considérée comme une similitude singulière de centre O, de rapport nul.

Étant donné deux éléments,

$$S_1(\mathrm{O},\ k_1,\ \theta_1) \quad \text{et} \quad S_2(\mathrm{O},\ k_2,\ \theta_2),$$

de l'ensemble $\mathscr{S}$, on définit une transformation ponctuelle du plan, notée $T = S_2 \star S_1$ de la manière suivante :

M_1 et M_2 sont respectivement les homologues de M dans les similitudes S_1 et S_2 ; l'homologue du point M dans la transformation T est le point P tel que

$$\overrightarrow{\mathrm{O}P} = \overrightarrow{\mathrm{O}M_1} + \overrightarrow{\mathrm{O}M_2}.$$

1. Pour se familiariser avec la transformation T, construire le point P, transformé d'un point M quelconque du plan, lorsqu'on donne

$$S_1\left(\mathrm{O},\ \frac{1}{3},\ \frac{\pi}{6}\right) \quad S_2\left(\mathrm{O},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{2\pi}{3}\right),$$

et calculer $\left(\overrightarrow{\mathrm{O}M},\ \overrightarrow{\mathrm{O}P}\right)$ et $\dfrac{\mathrm{O}P}{\mathrm{O}M}$.

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'axes Ox, Oy. On rappelle qu'à toute similitude $S(\text{O},\ k,\ \theta)$ transformant un point M quelconque du plan en un point M', on peut associer l'application du corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes sur lui-même, définie par $z' = az$, où z et z' sont respectivement les affixes des points M et M' et a le nombre complexe de module k et d'argument θ. On dira que a est l'opérateur complexe de la similitude S.

a. Calculer l'affixe, Z, du point P en fonction de l'affixe, z, du point M et des opérateurs, a_1 et a_2, des similitudes S_1 et S_2.

En déduire que la transformation T est une similitude de $\mathscr{S}$, dont on calculera le rapport et l'angle en fonction de $1, k_2, \theta_1$ et θ_2.

b. Montrer que l'application f qui, à toute similitude S de $\mathscr{S}$ fait correspondre son opérateur complexe a, est une bijection de $\mathscr{S}$ sur $\mathbb{C}$ vérifiant

$$f\left(S_1 \star S_2\right) = f\left(S_1\right) + f\left(S_2\right)$$

quels que soient les éléments S_1 et S_2 de $\mathscr{S}$, c'est-à-dire un isomorphisme de $(\mathscr{S},\ \star)$ sur $(\mathbb{C},\ +)$.

3. Montrer que $\mathscr{S}$, muni de la loi $\star$, est un groupe commutatif.

Quel en est l'élément neutre ? Préciser le rapport et l'angle de la similitude S', symétrique de $S\left(\text{O},\ k,\ \theta\right)$ pour la loi $\star$.

4. La loi de composition des similitudes associe au couple ordonné $\left(S_1,\ S_2\right)$ la similitude notée $S_2 \circ S_1$. Quel est l'opérateur complexe de $S_2 \circ S_1$?

Montrer que $\mathscr{S}$ muni des lois $\star$ et $\circ$ est un corps isomorphe au corps des nombres complexes.