Baccalauréat C Dijon septembre 1970

EXERCICE 1

Résoudre l'équation

$$3^{x+2}+9^{x-1}=1\,458,$$

où x est l'inconnue (réelle).

EXERCICE 2

1. Résoudre dans le corps, $\mathbb{C}$, des nombres complexes l'équation

$$z^2+(\mathrm{i}-1)\left(\sqrt{3}-3\right)z-12\mathrm{i}=0,$$

   où z est l'inconnue et i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
2. Calculer le module et l'argument des racines.

EXERCICE 3

On considère deux plans, l'upn (P) rapporté à un repère orthonormé d'axes Ox et Oy, l'autre (R) rapporté à un repère orthonormé d'axes ωp et ωq.
À tout point m de (R) de coordonnées, $(p\,;\,q)$, on associe l'ensemble (C_m) des points de (P) dont les coordonnées x et y vérifient, l'équation

$$y^2=x^2-2px+q;$$

m est appelé le point représentatif de (C_m) dans (R).

Partie A

1. Dans quelles régions du plan (R) le point m doit-il se trouver pour que l'ensemble (C_m) soit
   - un ensemble de deux droites;
   - une hyperbole d'axe focal Ox;
   - une hyperbole d'axe focal Oy?

   Construire les courbes $\left(C_{m_0}\right)$ et $\left(C_{m_1}\right)$ avec $m_0(+1\,;\,-8)$ et $m_1(+1\,;\,+5)$.
2. Quel est l'ensemble des points m de (R) représentatifs des hyperboles (C_m) ayant pour centre le point, I, de coordonnées $(0\,;\,\alpha)$, α étant donné?
3. Quel est l'ensemble des points m de (R) représentatifs des hyperboles (C_m) dont la distance focale $2c=\mathrm{FF}'$ est donnée?

Partie B

Dans toute cette partie, le point m décrit dans (R) la droite (Δ) d'équation

$$q-2ap+a^2=0 \quad (a\text{ nombre réel donné}).$$

1. Montrer que les ensembles (C_m) associés aux points m de (Δ) passent par un point fixe A.
2. Montrer que, lorsque les ensembles (C_m) sont des hyperboles, ces hyperboles sont tangentes en A à une droite fixe.
3. Déterminer le centre et le cercle principal d'une hyperbole (C_m) et caractériser l'ensemble des cercles principaux.