Durée : 4 heures

Baccalauréat C Dijon juin 1969

EXERCICE 1

Étudier la fonction $y = \text{Log} \cos x$.
Tracer la courbe représentative de cette fonction.

EXERCICE 2

Déterminer un nombre n de quatre chiffres, tel que les restes des divisions de 21 685 et 33 509 par n soient respectivement 37 et 53.

PROBLÈME

On donne, dans un plan, un cercle (Γ) de centre O, un point fixe, I, sur (Γ) et une droite (D) ne rencontrant pas (Γ).
On définit sur l'ensemble des points de (Γ) une loi de composition interne de la manière suivante :
Soit B et C deux points de (Γ). La droite BC [qui est tangente à (Γ) si B et C sont confondus] ou bien coupe la droite (D) en a, ou bien est parallèle à (D).
Appelons δ dans le premier cas la droite aI, dans le deuxième cas la parallèle à (D) menée par I. Le composé de B et de C, noté $\text{B} \star C$, est alors le deuxième point d'intersection de (Γ) avec δ [si δ est tangente à (Γ) en I, ce point est confondu avec I].

Partie A

1. Montrer que, quels que soient les points B et C de (Γ), on a

$$\text{B} \star \text{C} = \text{C} \star \text{B}.$$

2. Si B est un point quelconque de (Γ), déterminer le composé $\text{B} \star \text{I}$. Que peut-on dire du point I vis-à-vis de cette loi de composition ?
3. Si A est un point quelconque de (Γ), montrer qu'il existe deux points distincts de (Γ) solutions de l'équation

$$X^2 = \text{A}.$$

où X est un point inconnu et où X^2 désigne le composé $X \star X$.

4. Montrer que, quels que soient les points A et B de (Γ), il existe un point X unique de (Γ) tel que l'on ait

$$(1) \qquad \text{B} \star X = \text{A} ;$$

en particulier on notera B^{-1} le point de (Γ) tel que $\text{B} \star \text{B}^{-1} = \text{I}$.
Dans le cas où A et B sont quelconques, peut-on déterminer le point X qui vérifie (1), à partir de B^{-1} et de A ?

N. B. Les parties B et C sont indépendantes

Partie B

Soit P et Q les points de Poncelet du faisceau défini par (D) et (Γ).
Soit B et C, deux points de (Γ) et $\text{A}' = \text{B} \star \text{C}$.
Soit B_1, C_1, A'_1, I_1 et Q_1 les transformés des points B, C, A′, I et Q, respectivement, dans l'inversion $\mathscr{J}$ de pôle P et de puissance k^2 (k réel non nul).

1. Montrer que

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{Q_1I_1}}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{Q_1B_1}}\right)+\left(\overrightarrow{\mathrm{Q_1I_1}}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{Q_1C_1}}\right)=\left(\overrightarrow{\mathrm{Q_1I_1}}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{Q_1A_1'}}\right)\pmod{2\pi}$$

2. Soit G l'ensemble des nombres complexes de module 1.

a. Montrer que G est un groupe pour la loi « multiplication de deux nombres complexes ».

b. On considère un repère orthonormé $\left(\mathrm{Q_1},\,\overrightarrow{\imath}\,,\,\overrightarrow{\jmath}\right)$, d'origine $\mathrm{Q_1}$ où $\overrightarrow{\imath}=\overrightarrow{\mathrm{Q_1I_1}}$.

Si M est un point de (Γ), on désigne par M_1 le transformé de M dans l'inversion $\mathscr{J}$ et par z le nombre complexe dont l'image est M_1 dans le repère considéré.

Montrer que z appartient à G et que l'application φ de (Γ) dans G qui à M associe $\varphi(M)=z$ est bijective.

3. Montrer que, si B et C sont deux points quelconques de (Γ) on a $\varphi(\mathrm{B}\star\mathrm{C})=\varphi(\mathrm{B})\star\varphi(\mathrm{C})$.

En déduire que l'ensemble (Γ), muni de la loi $\star$, est un groupe.

Partie C

Il résulte de la partie B que la loi $\star$ est une loi associative sur (Γ), c'est-à-dire que, pour tout A, pour tout B, pour tout C, l'égalité

$$(2)\qquad \mathrm{A}\star(\mathrm{B}\star\mathrm{C})=(\mathrm{A}\star\mathrm{B})\star\mathrm{C}$$

est vraie.
Le but de cette partie est de faire établir cette égalité (2), non pour toutes les positions de A, B et C, mais « en général », c'est-à-dire suivant certaines conditions, qu'on précisera.
On posera

$$\mathrm{B}\star\mathrm{C}=\mathrm{A'}\quad\text{et}\quad\mathrm{A}*\mathrm{B}=\mathrm{C'}.$$

1. *Lemme* : Soit (L) et (L′) deux cercles sécants en S et T. Une droite passant par S coupe (L) en P et (L′) en P′ ; une droite passant par T coupe (L) en Q et (L′) en Q′.

Montrer que les droites PQ et P′Q′ sont parallèles.

2. On suppose que les points A, B et C vérifient les conditions suivantes :
- chacun d'eux est distinct de I ;
- A est distinct de C ;
- la droite BC coupe (D) en a ;
- la droite AB coupe (D) en c.

Montrer que les trois points a, B et I sont distincts et non alignés.

On désigne par (Γ') le cercle circonscrit au triangle aBI. (Γ') recoupe AB en α, IC′ en γ, et (D) en a'.

3. On suppose en outre que a' est distinct de c.

Montrer que les trois points a, γ et α sont distincts. Montrer que les droites AA′ et CC′ ne sont pas parallèles ; on désigne par ω leur point de rencontre.

Montrer que les deux triangles $a\gamma\alpha$ et ω C′A sont homothétiques. (On pourra utiliser le lemme.)

En déduire (dans les conditions envisagées) l'égalité (2)