

∞ Baccalauréat C Dijon juin 1971 ∞

EXERCICE 1

Vérifier que

$$x^4 + x^3 + x + 1 \equiv (x-2)^4 \pmod{3},$$

quel que soit l'entier relatif x .

En déduire les entiers relatifs, x , tels que

$$x^4 + x^3 + x + 1 \equiv 0 \pmod{3},$$

EXERCICE 2

On considère la fonction réelle, f , de la variable réelle x définie par

$$y = f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}},$$

où e est la base des logarithmes népériens.

Quel est son ensemble de définition ?

Trouver les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, lorsque x tend vers $-\infty$, lorsque x tend vers 0.

Déterminer le sens de variation de f .

PROBLÈME

Un plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$. Soit (E) l'ensemble des points du plan non situés sur l'axe $x'Ox$.

Partie A

Au couple (M_1, M_2) de deux points $M_1(x_1; y_1)$ et $M_2(x_2; y_2)$ de E on associe le point $N(x_1 + x_2; y_1 y_2)$. Démontrer que l'on définit ainsi dans (E) une loi de composition interne, que l'on notera \star , et que (E, \star) est un groupe commutatif. On désigne par I l'élément neutre de ce groupe.

Partie A

Soit T la transformation ponctuelle qui, à tout point M de (E) , fait correspondre son symétrique M' pour la loi \star .

- Démontrer, sans calcul, que T est une bijection de (E) sur lui-même. Est-ce une involution ?
 - Démontrer que T admet deux points doubles : le point I et un point J , que l'on précisera.
 - Construire M' lorsque M est donné. Démontrer que, si la droite MM' coupe les droites (Δ) et (Δ') d'équations respectives $y = 1$ et $y = -1$ aux points P et P' , la division (M, M', P, P') est harmonique.
- Soit (H) l'hyperbole équilatère passant par I dont une asymptote est l'axe $x'Ox$, l'autre asymptote étant la droite d'équation $x = h$, h nombre réel donné.
Écrire l'équation de (H) .
Déterminer l'ensemble des points transformés des points de (H) par T .
Soit (I_i) la tangente en I à (H) . Déterminer l'image par T de l'ensemble $(I_i) \cap (E)$.

- b.** Soit (D) une droite du plan. Déterminer l'image (D'_1) par T de l'ensemble $(D_1) = (D) \cap (E)$.
Lorsque (D) coupe les axes en $A(a; 0)$ et $B(0; b)$ distincts de O , démontrer que la tangente à (D'_1) , au point N d'intersection de (D'_1) avec $y'Oy$, est la polaire de B par rapport aux droites AI et AJ .
- 3. a.** Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 1 .
Former l'équation de l'image (C'_1) par T de

$$(C_1) = (C) \cap (E).$$

Tracer (C'_1) sur le même graphique que (C) .

- b.** Soit M un point de (C_1) , (D) la tangente en M au cercle (C) et (D'_1) l'image par T de $(D_1) = (D) \cap (E)$.
Démontrer que (C'_1) et (D'_1) ont même tangente au point M' transformé de M par T .