

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Dijon juin 1972 ∞

EXERCICE 1

Le nombre \bar{z} est le nombre complexe conjugué du nombre complexe z non nul ; calculer en fonction du module, ρ , et de l'argument, θ , de z , le module et l'argument du nombre complexe Z tel que

$$Z = z - \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \bar{z}.$$

EXERCICE 2

Dans le plan affine euclidien de repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère l'ensemble (Γ_λ) des points M dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient l'équation

$$y^2 = -2x^2 + 2\lambda x + 1 - \lambda^2 \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Préciser, suivant les différentes valeurs de λ , la nature de (Γ_λ) et ses éléments remarquables.

PROBLÈME

1. On considère l'application f_n de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{1-x} \quad (n \text{ entier naturel non nul}).$$

a. Calculer la limite de $\text{Log} \left[\frac{x^n}{e^x} \right]$ quand x tend vers $+\infty$.

En déduire la limite de $\frac{x^n}{n!}$ quand x tend vers $+\infty$.

b. Donner le tableau de variations de f_n en distinguant les deux cas suivants :

n est pair, et n est impair.

c. Tracer, dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les courbes représentatives des fonctions f_2 et f_3 ; on précisera la position relative de ces courbes.

d. En revenant au cas général, montrer que, si $0 \leq x \leq 1$, alors on a

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n!}$$

2. Soit $I_n = \int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{1-t} dt$.

a. Quelle est la dérivée de l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui à t associe e^{1-t} ?

En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, la valeur de I_1 .

b. De même, en intégrant I_n par parties, vérifier la relation de récurrence

$$I_n - I_{n-1} = -\frac{x^n}{n!} e^{1-x}.$$

c. Démontrer que l'on a

$$I_n = e - e^{1-x} \left[1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right]$$

c'est-à-dire

$$I_n = e - e^{1-x} \sum_{p=0}^{p=n} \frac{x^p}{p!}.$$

Quelle est la limite, pour n fixé, de I_n quand x tend vers $+\infty$?

3. Dans toute cette question, on donne à x la valeur 1 et l'on pose

$$J_n = \int_0^1 \frac{t^n}{n!} e^{1-t} dt.$$

a. Démontrer que $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n!}$.

En déduire, en utilisant le calcul de I_n , que

$$0 \leq e - \left[\sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} \right] \leq \frac{1}{n!}$$

et

$$\left[\sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} \right] \leq e \leq \left[\sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} \right] + \frac{1}{n!}.$$

b. Quelle est la limite, quand n tend vers $+\infty$, de $\left[\sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} \right]$?

c. En calculant $\left[\sum_{p=0}^7 \frac{1}{p!} \right]$ donner le meilleur encadrement, permis par ce calcul, du nombre e .