Baccalauréat C juin 1973 Dijon

EXERCICE 1

On considère $I(\alpha) = \displaystyle\int_1^{\alpha} \cos(\log x)\,\mathrm{d}x$ où α désigne un nombre réel strictement positif.
(Le symbole log désigne le logarithme népérien).

1. Calculer $I(\alpha)$ à l'aide de deux intégrations par parties successives.
2. Donner une valeur approchée de $I\left(\mathrm{e}^{\pi}\right)$ avec la précision permise par les tables de logarithmes.

EXERCICE 2

Dans le plan affine euclidien E rapporté à un repère orthonormé, on associe à un point M de coordonnées $(x~;~y)$ le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$; on dit que z est l'affixe de M.
Soit (T) l'application de E dans E qui au point M d'affixe z associe le point M' dont l'affixe z' est telle que $z' = f(z)$ avec

$$f(z) = \mathrm{i}\sqrt{2}\overline{z} + 1 - \mathrm{i}\sqrt{2}.$$

($\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z).

1. La transformation (T) admet -elle un point invariant ?
2. Caractériser géométriquement la transformation (T).

PROBLÈME

Soit E un plan affine rapporté à un repère cartésien $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

Partie A

À tout réel non nul, λ, on associe la courbe (C_{λ}) qui représente dans le repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ les variations de la fonction g_{λ}, déterminée par

$$g_{\lambda}(x) = x \log \frac{x}{\lambda}.$$

(le symbole log désigne le logarithme népérien).

1. Étudier pour λ strictement positif, les variations de la fonction h_{λ} déterminée par

$$\left\{\begin{array}{l c l}h_{\lambda}(x) & = & g_{\lambda}(x) \text{ si } x > 0\\ h_{\lambda}(0) & = & 0.\end{array}\right.$$

   On montrera que h_{λ} est continue sur $[0~;~+\infty[$.
   Est-elle dérivable au point $x = 0$?
2. Démontrer que toute courbe (C_{λ}) est transformée de (C_1) par une homothétie de centre O dont on précisera le rapport.
3. Construire sur une même figure les courbes (C_1), (C_{-1}), (C_{e}), (on désigne par e la base des logarithmes népériens).
4. Soit M_{λ} le point de (C_{λ}) où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
   Quel est l'ensemble des points M_{λ} lorsque λ décrit l'ensemble des réels non nuls ?

Partie B

Soit a un nombre réel strictement positif donné. À tout nombre réel t on associe l'application de E dans E, notée f_t, qui à tout point M de coordonnées $(x~;~y)$ associe le point M' de coordonnées $\left(x'~;~y'\right)$ définies par

$$\left\{\begin{array}{l c l}x' &=& a^t x,\\ y' &=& ta^t x + a^t y.\end{array}\right.$$

1. Montrer, que pour t donné, f_t est une application affine bijective.

2. On munit l'ensemble $\mathcal{F}_a$ des applications f_t, lorsque t décrit $\mathbb{R}$, de la loi de composition des applications, notée $\circ$.

Montrer que $(\mathcal{F}_a,~\circ)$ est un groupe isomorphe au groupe $(\mathbb{R},~+)$.

3. Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie dans E par $M\mathcal{R}M'$ si, et seulement si, il existe une application f_t appartenant à $\mathcal{F}_a$ telle que $f_t(M) = M'$.

Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

La classe d'équivalence d'un point donné, M, sera appelée *orbite* de M. On remarquera que l'orbite de M est l'ensemble des transformés de M par tous les éléments du groupe $\mathcal{F}_a$.

4. Dans le cas particulier où $a = 1$, quelle est l'orbite du point M_0 de coordonnées $\left(x_0~;~y_0\right)$?

Discuter suivant la position de M_0.

Partie C

Dans toute la suite du problème, on se restreint au cas où $a = \text{e}$.

1. Soit A le point de coordonnées $(0~;~\mu)$. Quelle est l'orbite de A ?

2. Soit B le point de coordonnées $(\lambda~;~0)$, où λ est un réel non nul.

Comparer l'orbite de B et la courbe (C_λ) ?