Durée : 4 heures

Baccalauréat C juin 1974 Dijon

EXERCICE 1

Soit x un réel donné ; on appelle $\mathrm{E}(x)$ le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x, c'est-à-dire que : $\mathrm{E}(x) \leqslant x < \mathrm{E}(x)+1$.
On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur l'intervalle $[-1 ; +2]$ par

$$f(x) = \mathrm{E}(x)\sin \pi x$$

1. Exprimer $f(x)$ à l'aide de $\sin \pi x$ lorsque x appartient à l'un des intervalles $[-1 ; 0[$, $[0 ; 1[$ ou $[1 ; 2[$.
   En déduire que f est continue sur $[-1 ; +2]$.
2. Étudier la dérivabilité de f en $x = 0$ et $x = 1$.
   Étudier les variations de f sur l'intervalle $[-1 ; +2]$.
3. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

EXERCICE 2

Soit n et p deux entiers naturels non nuls, x un élément de $\mathbb{Z} - \{0 ; 1\}$ donnés, $\mathbb{Z}$ étant l'ensemble des nombres entiers relatifs.

1. Démontrer l'équivalence des propositions suivantes :
   P_1 : p divise $x^2 - x$
   P_2 : pour tout entier naturel non nul n, p divise $x^n - x$.
2. Déterminer les entiers relatifs x tels que : pour tout entier naturel non nul n, 6 divise $x^n - x$.

PROBLÈME

Dans le plan affine euclidien P, rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère le cercle (C) d'équation $x^2 - 2x + y^2 = 0$.
Soit a et b deux réels donnés, et $\varphi_{a,\,b}$ l'application de P dans lui-même qui transforme tout point M, de coordonnées x et y, en le point M' de coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x + a \\ y' & = & y\mathrm{e}^{b} \end{array}\right.$$

(e désigne la base des logarithmes népériens)
On désigne par Φ l'ensemble des applications $\varphi_{a,\,b}$ lorsque (a, b) décrit $\mathbb{R}^2$.

1. **a.** Démontrer que $\varphi_{a,\,b}$ est une transformation affine.
   b. Démontrer que Φ ,muni du produit de composition des applications, est un groupe isomorphe à $\left(\mathbb{R}^2, +\right)$.
   c. Déterminer la courbe $\mathscr{E}_{a,\,b}$ transformée du cercle (C) par l'application $\varphi_{a,\,b}$; on en donnera les axes, les sommets et l'excentricité ϵ.
2. Soit Φ' le sous-ensemble de Φ défini par : $\Phi' = \left\{\varphi_{a,\,-a\sqrt{2}},\ a \in \mathbb{R}\right\}$.
   On note f_a l'application $\varphi_{a,\,-a\sqrt{2}}$.

a. Soit M_0 le point de coordonnées $\left(x_0\,;\,y_0\right)$ dans le plan P. Déterminer l'équation de l'ensemble $\Gamma_0 = \left\{f_a\left(M_0\right),\ a \in \mathbb{R}\right\}$.

Pour quels points M_0, Γ_{M_0} est-il une droite ?

Démontrer que Γ_{M_0} est globalement invariant par tout élément de Φ'.

b. Lorsque a n'est pas nul, on note $\mathscr{F}_a$ la courbe transformée du cercle (C) par f_a, c'est-à-dire que : $\mathscr{F}_a = \mathscr{E}_{a,\,-a\sqrt{2}}$.

Exprimer l'excentricité ϵ de $\mathscr{F}_a$ en fonction de a.

Soit h la fonction numérique de la variable réelle a définie par :

$$h(a) = \left\{\begin{array}{lll} \epsilon(a) & \text{si} & a \neq 0 \\ 0 & \text{si} & a = 0 \end{array}\right.$$

c. Soit A le point de coordonnées $\left(1\,;\,\dfrac{\mathrm{e}}{\sqrt{2}}\right)$.

Étudier la continuité et la dérivabilité de h. Tracer la courbe représentative de h dans un repère orthonormé.

Donner l'équation de la courbe Γ_{A} et vérifier que Γ_{A} et (C) sont tangents au point B de coordonnées $\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,;\,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, c'est-à-dire qu'ils admettent même tangente en ce point.

En déduire que Γ_{A} est tangent à chacune des courbes $\mathscr{F}_a$ en un point que l'on précisera.

3. Construire sur un même dessin les courbes $(C), \Gamma_{\text{A}}, \mathscr{F}_2$ et la courbe symétrique de Γ_{A} par rapport à l'axe des abscisses (on prendra 4 cm pour unité de longueur).

Note : Pour déterminer les coordonnées de quelques points des courbes demandées, on prendra les valeurs approcheées suivantes :

$$\begin{array}{llllll} \sqrt{2} : & 1,4 & \mathrm{e}^{\sqrt{2}} : & 4,1 & \mathrm{e}^{\sqrt{2}+1} : & 11,1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} : & 0,7 & \mathrm{e}^{-\sqrt{2}} : & 0,2 & & \end{array}$$