Durée : 4 heures

Baccalauréat C 1975 Dijon

EXERCICE 1

Soit, dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, les courbes (H) et (E), ensembles des points M dont les coordonnées $(x\,;\ y)$ vérifient :

$$\begin{array}{lrcl}(H) & 4x^2-9y^2+8x+54y-113 & = & 0\\ (E) & 16x^2+9y^2+32x-54y-47 & = & 0\end{array}$$

Trouver les équations réduites de (H) et (E).
Vérifier que (H) et (E) ont le même centre de symétrie.
Trouver les axes de symétrie de (H) et de (E) ainsi que leurs foyers. Reconnaître les courbes (H) et (E).

EXERCICE 2

1. Étudier le reste de la division par 7 de 10^n lorsque l'entier naturel n appartient à l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
2. Déterminer les chiffres x et y pour que le nombre, qui s'écrit $\overline{2xyyx2}$ dans le système décimal, soit divisible par 21.

PROBLÈME

Les questions A - 2. et A - 3. sont indépendantes l'une de l'autre
La partie B - ne dépend que partiellement des résultats de la partie A

Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel euclidien orienté par le choix d'une base orthonormée directe $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$; soit P un plan affine euclidien, dont $\mathcal{V}$ est l'espace vectoriel associé. On rapporte P à un repère cartésien $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Soit a un nombre réel, et f_a l'application affine de P dans lui-même qui, au point M de coordonnées $(x\,;\ y)$ associe le point M' dont les coordonnées x' et y' sont :

$$\left\{\begin{array}{lcl}x' & = & ax\\ y' & = & (a+3)x-ay+a+9\end{array}\right.$$

Partie A

1. Démontrer que, pour toute valeur non nulle de a, f_a est une bijection.
   Déterminer l'application f_a^{-1}, réciproque de f_a pour a non nul. a a Déterminer l'ensemble des points invariants par f_a ; discuter suivant les valeurs de a.
2. Démontrer que, seule, l'application f_1 obtenue pour la valeur 1 du paramètre a, est une involution que l'on caractérisera.
   Démontrer que l'application f_{-1} obtenue pour la valeur -1 du paramètre a, est la composée d'une involution s par une translation t dont le vecteur est un vecteur directeur de la direction de l'ensemble des points invariants par s, c'est-à-dire que $f_{-1} = t \circ s$.
3. On étudie dans cette question l'application f_0 obtenue pour la valeur 0 du paramètre.
   On rappelle qu'un point M de P ayant pour coordonnées x et y dans le repère $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, on désigne par affixe de M le nombre complexe $x+\text{i}y$, où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Démontrer que le nombre complexe z' est l'affixe du transformé M' d'un point M d'affixe z par f_0 si et seulement si l'on a :

$$z' = 3\mathrm{i}\frac{z+\overline{z}}{2} + 9\mathrm{i}.$$

($\overline{z}$ est le complexe conjugué de z).
Quelle est la nature de l'application p du plan affine dans lui-même, qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $\dfrac{z+\overline{z}}{2}$?
En déduire que f_0 est la composée de p par une similitude directe σ, c'est-à- dire que $f_0 = \sigma \circ p$.
Donner les éléments caractéristiques de σ et p.

Partie B

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ de la fonction numérique G de la variable réelle x définie par

$$G(x) = 2x + 5 + \frac{\mathrm{Log}\,x}{x}$$

où Log désigne le logarithme népérien.

1. **a.** g étant la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$g(x) = 2x^2 + 1 - \mathrm{Log}\,x,$$

étudier les variations de g, et préciser le signe de $g(x)$.
(On ne demande pas le tracé de la courbe représentative).

b. Étudier les variations de la fonction G.
Démontrer que la droite, dont une équation dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ est $y = 2x + 5$, est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$. Tracer cette courbe $(\mathscr{C})$.

2. On appelle $(\mathscr{C}_1)$ la transformée de la courbe $(\mathscr{C})$ par l'application f_1 définie dans A - 2.

a. Écrire l'équation de la courbe $(\mathscr{C}_1)$ dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. Démontrer que $(\mathscr{C}_1)$ est la courbe représentative dans ce repère d'une certaine fonction numérique d'une variable réelle que l'on notera G_1.

b. Démontrer que $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}_1)$ ont mêmes asymptotes.
Construire alors $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C})$ dans le même repère, sans étudier la fonction $G_{l?1}$.

c. Calculer l'aire des domaines plans D et D_1 ensembles des points dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifient :

$$D\quad \left\{\begin{array}{lllll} 1 & \leqslant & x & \leqslant & m\\ 2x+5 & \leqslant & y & \leqslant & G(x)\end{array}\right. \qquad D_1\quad \left\{\begin{array}{lllll} 1 & \leqslant & x & \leqslant & m\\ G_1(x) & \leqslant & y & \leqslant & 2x+5\end{array}\right.$$

m étant un réel strictement supérieur à 1.