

∞ Baccalauréat C Dijon juin 1976 ∞

EXERCICE 1

1. Calculer en fonction de n la somme des n premiers entiers naturels non nuls,
2. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$\sum_{p=1}^{p=n} p^3 = \left(\sum_{p=1}^{p=n} p \right)^2$$

(Le candidat pourra utiliser un raisonnement « par récurrence »).

Soit s la suite de terme général

$$s_n = \sum_{p=1}^{p=n} p^3.$$

Exprimer s_n en fonction de n .

3. Soit D_n le plus grand diviseur commun des nombres s_n et s_{n+1} . Calculer D_n lorsque :
 - a. $n = 2k$
 - b. $n = 2k + 1$

En déduire que, pour $n > 1$, D_n est différent de 1 et que trois termes consécutifs s_n, s_{n+1}, s_{n+2} de la suite s sont premiers entre eux dans leur ensemble.

EXERCICE 2

Soit P un plan affine euclidien, rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1; \vec{e}_2)$. Soit \mathbb{C} le corps des nombres complexes. À tout point M de coordonnées $(x; y)$ dans le repère $(O, \vec{e}_1; \vec{e}_2)$, on associe son affixe, le nombre complexe $z = x + iy$. On rappelle que i est un nombre complexe dont le carré vaut -1 .

Soit A le point de coordonnées $(1; 0)$ et B le point de coordonnées $(0; 1)$ dans le repère $(O, \vec{e}_1; \vec{e}_2)$.

1. Soit S_1 la similitude directe de centre O , de rapport $\sqrt{2}$, et dont une détermination de l'angle est $\frac{\pi}{4}$. Déterminer l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} qui, à tout nombre complexe z d'image M , associe le nombre complexe z' d'image $M' = S_1(M)$.
2. Soit A' et B' les images de A et B par S_1 . Démontrer qu'il existe une similitude directe S_2 et une seule qui transforme A en B' et B en A' .
Préciser son centre, son rapport et donner une détermination de son angle (Le candidat devra faire une figure soignée).
3. De l'étude du produit $S_2 \circ S_1$ où \circ représente le produit de composition des applications, déduire une expression de S_2 sous la forme $S_2 = S_1 \circ S$, S étant une symétrie par rapport à un point que l'on précisera.

PROBLÈME

Soit \mathcal{F} l'ensemble des fonctions numériques de la variable réelle x , définies sur l'ensemble \mathbb{R}_+^* des nombres réels strictement positifs.

Soit \mathcal{E} l'ensemble des fonctions numériques de la variable réelle t , définies et continues sur $[0; 1]$, ainsi que leur fonction dérivée première f' .

On rappelle que chacun de ces deux ensembles, muni de l'addition des fonctions et de la multiplication d'une fonction par un réel, a une structure d'espace vectoriel sur le corps des nombres réels.

Partie A

1. Calculer l'intégrale

$$I(x) = \int_0^{\pi} e^{-tx} dt,$$

x étant un paramètre réel strictement positif, e la base des logarithmes népériens.

2. a. Soit
- g
- la fonction numérique de la variable réelle
- x
- donnée par :

$$g(x) = e^{\pi x} - 1 - \pi x.$$

Étudier le sens de variation de g ; en déduire que, pour tout réel x strictement positif, $g(x)$ est strictement positif.

- b. Étudier les variations de la fonction numérique
- I
- de la variable réelle
- x
- , définie pour tout réel
- x
- strictement positif, par :

$$I(x) = \int_0^{\pi} e^{-tx} dt.$$

On ne demande pas de tracer la courbe représentative.

Partie B

1. a. Soit
- f
- une fonction, élément de
- \mathcal{E}
- . Justifier l'existence, pour tout nombre réel
- x
- strictement positif, de l'intégrale :

$$\int_0^{\pi} e^{-tx} f(t) dt.$$

- b. Soit
- L
- l'application de
- \mathcal{E}
- dans
- \mathcal{F}
- qui, à tout élément
- f
- de
- \mathcal{E}
- associe la fonction
- F
- définie pour tout réel
- x
- strictement positif, par

$$F(x) = \int_0^{\pi} e^{-tx} f(t) dt.$$

Démontrer que L est une application linéaire.

2. Pour toute fonction
- f
- de
- \mathcal{E}
- , on pose

$$L(f) = F \quad ; \quad L(f') = F^*.$$

Démontrer que la fonction F^* est définie, pour tout réel x strictement positif, par :

$$F^*(x) = e^{-\pi x} f(\pi) - f(0) + xF(x).$$

Partie C

Soit f_1, f_2, f_3 les trois fonctions numériques définies sur $[0; \pi]$ par

$$\begin{aligned} f_1(t) &= 1 \\ f_2(t) &= \cos 2t \\ f_3(t) &= \sin 2t \end{aligned}$$

Soit \mathcal{E}_1 l'ensemble des fonctions numériques $af_1 + bf_2 + cf_3$, pour tout triplet (a, b, c) de nombres réels.

1. Démontrer que \mathcal{E}_1 est un espace vectoriel sur \mathbb{R} , dont une base \mathcal{B} , est (f_1, f_2, f_3) .
2. On note L_1 la restriction de L à \mathcal{E}_1 c'est-à-dire l'application de \mathcal{E}_1 dans \mathcal{F} définie par :

$$(\forall f \in \mathcal{E}_1)(L_1(f) = L(f) = F)$$

- a. Déterminer les fonctions

$$F_1 = L_1(f_1), \quad F_2 = L_1(f_2), \quad F_3 = L_1(f_3)$$

- b. Soit f un élément de \mathcal{E}_1 exprimé dans la base \mathcal{B} . Calculer $F(x)$, pour tout nombre réel x strictement positif.
 - c. Démontrer que L_1 est une application injective.
3. a. Soit f un élément de \mathcal{E}_1 . Justifier le fait que $f([0; \pi])$ est un intervalle fermé $[m; M]$, avec $m \leq M$.
 - b. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$m \cdot \frac{1 - e^{-\pi x}}{x} \leq \int_0^\pi e^{-tx} f(t) dt \leq M \cdot \frac{1 - e^{-\pi x}}{x}$$

- c. x étant donné égal à x_0 , démontrer qu'il existe au moins un réel t_0 de l'intervalle $[0; \pi]$ tel que

$$F(x_0) = f(t_0) \frac{1 - e^{-\pi x_0}}{x_0}$$

Calculer t_0 dans le cas particulier :

$$f = f_1 + f_2 + f_3 \quad \text{et} \quad x_0 = 2.$$