Baccalauréat C Dijon juin 1977

EXERCICE 1 **3 POINTS**

On considère l'anneau commutatif $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ dont les éléments sont notés $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{7}$.

1. Quels sont les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$?
   Montrer qu'ils forment un groupe multiplicatif. Dresser leur table.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \overline{3}x+\overline{6}y &=& \overline{5}\\ \overline{5}x+\overline{2}y &=& \overline{3}.\end{array}\right.$$

EXERCICE 2 **5 POINTS**

x étant réel, on note $\mathrm{E}(x)$ le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.
On considère les fonctions :

$$\varphi : \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & x - \mathrm{E}(x)\end{array} \qquad h : \begin{array}{lcl} [0\,;\,1] & \to & [0\,;\,1]\\ u & \longmapsto & |2u-1|\end{array}$$

1. Soit $f = h \circ \varphi$.
   Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$, que f admet le réel 1 pour période et est une fonction paire.
   Représenter graphiquement f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath}\right)$.
2. Soit F la restriction de f au segment $\left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$.
   Démontrer que F admet une fonction réciproque F^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition et l'ensemble image.
3. Soit $g = F^{-1} \circ f$.
   Démontrer que g est définie, continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période 1 et paire.
   k étant un entier relatif, exprimer $g(x)$ en fonction de x et de k dans les deux cas suivants :

$$x \in \left[k\,;\,k+\frac{1}{2}\right[\qquad x \in \left[k-\frac{1}{2}\,;\,k\right[$$

PROBLÈME **12 POINTS**

Partie A

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension 3, $\left(\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath},\,\overrightarrow{k}\right)$ une base de E.
m étant un réel, soit φ_m l'endomorphisme de E (application linéaire de E dans E) qui, au vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ associe le vecteur $\overrightarrow{u_1} = \varphi_m\left(\overrightarrow{u}\right)$ de coordonnées $\left(x_1\,;\,y_1\,;\,z_1\right)$ telles que

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 &=& 2mx+3y+mz\\ y_1 &=& (2-m)x+(3m-2)y+6z\\ z_1 &=& (m-2)y+2mz\end{array}\right.$$

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\varphi_m\left(\overrightarrow{\imath}\right)$, $\varphi_m\left(\overrightarrow{\jmath}\right)$, $\varphi_m\left(\overrightarrow{k}\right)$.

2. Démontrer que, quel que soit le réel m, le système de vecteurs $\left(\varphi_m\left(\vec{\imath}\right), \varphi_m\left(\vec{\jmath}\right)\right)$ est libre. (On pourra étudier d'abord le cas particulier $m = 2$, puis $m \neq 2$).
3. Déterminer l'ensemble des valeurs de m pour lesquels le système de vecteurs $\left(\varphi_m\left(\vec{\imath}\right), \varphi_m\left(\vec{\jmath}\right), \varphi_m\left(\vec{k}\right)\right)$ est lié. En déduire l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles φ_m est un automorphisme de E.
4. On suppose $m = 0$.
   Déterminer le noyau N_0 de φ_0, l'image I_0 de φ_0 et démontrer que N_0 et I_0 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
5. On suppose $m = 2$. Prouver que φ_2 est bijective et déterminer analytiquement l'application réciproque φ_2^{-1}.

Partie B

On rappelle que l'ensemble $\mathcal{F}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1. À chaque triplet $(x\,;\,y\,;\,z)$ de réels, on associe l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad f(t) = x\text{e}^t + yt\text{e}^t + zt^2\text{e}^t$$

   e étant la base des logarithmes népériens.
   Soit E l'ensemble des applications f, démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ et que les applications i, j, k de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} i(t) & = & \text{e}^t \\ j(t) & = & t\text{e}^t \\ k(t) & = & t^2\text{e}^t \end{array}\right.$$

   forment une base de l'espace vectoriel E. $(x\,;\,y\,;\,z)$ sont alors les coordonnées de f dans la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
2. On note f' et f'' les fonctions dérivées première et seconde de f.
   Calculer pour t réel, $f'(t)$ et $f''(t)$. En déduire que f' et f'' sont éléments de E.
3. On définit l'application ψ de E dans E telle que :

$$\psi(f) = 2f + f' + f''.$$

   Démontrer que ψ est un endomorphisme de E et déterminer dans la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ les coordonnées x_1, y_1, z_1 de $\psi(f)$ en fonction de coordonnées de f.
   En utilisant les résultats de A 5., prouver que ψ est une bijection de E sur E et déterminer ψ^{-1} sans nouveaux calculs.
4. Soit h élément de E définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h(t) = \left(-3 - 6t + 4t^2\right)\text{e}^t$$

   Résoudre dans E l'équation :

$$\psi(f) = h.$$

5. Étudier et représenter graphiquement dans le plan rapporté à un repère orthonormé la fonction f définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \left(1 - 3t + t^2\right)\text{e}^t$$