Baccalauréat C Dijon juin 1978

EXERCICE 1 **3 POINTS**

1. Soit x un nombre réel strictement positif. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale

$$I(x) = \int_1^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{2t\text{Log}\, t}{(1+t^2)^2}\,\text{d}t$$

où Log t représente le logarithme népérien du nombre réel t. (On remarquera que, pour tout nombre réel t non nul,

$$\frac{1}{t\left(1+t^2\right)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}.$$

2. Soit I la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$I : x \longmapsto I(x), \quad \text{pour } x \text{ strictement positif.}$$

Cette fonction admet-elle une limite lorsque x tend vers 0 ?

EXERCICE 2 **4 POINTS**

1. Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division par 7 de 2^n ,puis de 10^{2n}.

Vérifier que le nombre qui s'écrit 787 878 en base dix est divisible par 7.

2. Soit b et c deux entiers naturels qui satisfont aux conditions suivantes :

$$0 < b \leqslant 9 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant c \leqslant 9$$

Pour chaque entier naturel non nul n, on considère le nombre $a(n)$ qui s'écrit $\overline{bcbc\cdots bc}$ en base dix, b et c étant répétés chacun n fois.

Déterminer, suivant les valeurs des entiers b et c, l'ensemble des entiers n tels que $a(n)$ soit divisible par 7.

PROBLÈME **13 POINTS**

Les parties A et B sont indépendantes, A étant un exemple illustrant B.

Partie A

On rappelle que l'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions numériques d'une variable réelle définies sur $\mathbb{R}$, muni de l'addition des fonctions et de la multiplication par un réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
On note f_1 et f_2 les éléments de $\mathcal{F}$ définis respectivement par

$$f_1(x) = (1+x)\text{e}^x, \qquad f_2(x) = (1-x)\text{e}^x$$

où e désigne la base des logarithmes népériens.
Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ engendré par la partie $\left(f_1\ ;\ f_2\right)$?

1. Vérifier que $\left(f_1\ ;\ f_2\right)$ est une base de E.

2. Soit f un élément de E. Démontrer que sa fonction dérivée f' est élément de E. Soit φ l'application de E dans E qui, à tout élément de E, associe sa fonction dérivée première.

Établir que φ est une application linéaire de E dans lui-même (ou endomorphisme de E).

3. Démontrer que l'ensemble des vecteurs de E invariants par φ est une droite vectorielle D dont on donnera une base.

4. Démontrer que, pour tout élément f de E, $\varphi(f) - f$ est élément de D.

Partie B

Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et D une droite vectorielle donnée de E. On considère l'ensemble $\mathcal{G}$ des endomorphismes g de E qui possèdent les deux propriétés suivantes :

$$\begin{array}{lll}(1) & (\forall \overrightarrow{u} \in D) & \left(g\left(\overrightarrow{u}\right) - \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}\right)\\ (2) & (\forall \overrightarrow{u} \in \mathrm{E}) & \left(g\left(\overrightarrow{u}\right) - \overrightarrow{u} \in D\right)\end{array}$$

1. Prouver que le noyau de tout élément g de $\mathcal{G}$ est inclus dans D. En déduire que tout élément de $\mathcal{G}$ est bijectif.

2. Soit $\overrightarrow{j}$ un vecteur donné de D, non nul.

a. Soit g un élément donné de $\mathcal{G}$.

Démontrer que pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de E, on peut trouver un nombre réel x et un seul tel que

$$g\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{u} + x\overrightarrow{j}.$$

On définit ainsi l'application θ de E dans $\mathbb{R}$ par

$$\theta : \overrightarrow{u} \longmapsto \theta\left(\overrightarrow{u}\right) = x.$$

Démontrer que θ est une application linéaire ; en déterminer le noyau.

b. Inversement, soit θ une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$, de noyau D ou E. Soit g l'application de E dans E définie par

$$g\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{u} + \theta\left(\overrightarrow{u}\right)\overrightarrow{j}.$$

g est-elle élément de $\mathcal{G}$?

3. Prouver qu'il existe au moins une base de E dans laquelle la matrice de tout élément de g soit de la forme $\begin{pmatrix}1 & 0\\ b & 1\end{pmatrix}$, b étant un nombre réel.

Soit $\mathcal{B}$ une telle base.

4. Démontrer que $(\mathcal{G}, \circ)$ est un sous-groupe du groupe des endomorphismes bijectifs de E, $\circ$ désignant la loi de composition des applications.

5. Pour tout réel m, on note Δ_m la droite vectorielle dont une équation dans la base $\mathcal{B}$ est $y - mx = 0$ et s_m la symétrie par rapport à Δ_m, de direction D.

Soit m un réel donné ; démontrer que, quel que soit l'élément g de $\mathcal{G}$, on peut trouver un réel m' tel que

$$g = s_{m'} \circ s_m.$$