

Baccalauréat C Dijon juin 1979

EXERCICE 1

3 POINTS

L'espace affine euclidien de dimension 3 est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère l'application affine f qui, à tout point M de coordonnées (x, y, z) associe le point M' dont les coordonnées (x', y', z') sont données par

$$\begin{cases} x' = y + 2 \\ y' = x - 1 \\ z' = -z \end{cases}$$

Démontrer que l'application linéaire associée à f est une rotation vectorielle dont on précisera l'axe et l'angle.

En déduire que f est un vissage.

EXERCICE 2

4 POINTS

Soit α un entier relatif non nul. Pour tout couple (a, b) d'entiers relatifs, on pose

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & ab \\ b & a \end{pmatrix}$$

et on note A_α l'ensemble de ces matrices lorsque (a, b) décrit \mathbb{Z}^2 .

1. Démontrer que A_α est stable par l'addition et la multiplication des matrices. La multiplication est-elle commutative dans A_α ?
2. Démontrer qu'il existe $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(c, d) \neq (0, 0)$ dans \mathbb{Z}^2 tels que $M_{a,b} \times M_{c,d} = M_{0,0}$.
3. On suppose qu'il existe β , élément de \mathbb{Z} , tel que $\alpha = \beta^2$. Déterminer l'ensemble des couples (a, b) de \mathbb{Z}^2 tels qu'il existe (c, d) différent de $(0, 0)$ dans \mathbb{Z}^2 avec $M_{a,b} \times M_{c,d} = M_{0,0}$.

PROBLÈME

13 POINTS

Dans ce problème, e représente la base des logarithmes népériens.

Partie 1

Soit x_0 un réel. On note $I(x_0)$ l'intégrale :

$$I(x_0) = \int_0^{x_0} \frac{(x_0 - t)^2}{2} e^t dt.$$

1. a. Sachant que $e^t \leq e^{x_0}$ si $t \leq x_0$, démontrer sans calculer $I(x_0)$ que

$$0 \leq I(x_0) \leq e^{x_0} \cdot \frac{x_0^3}{6}, \quad \text{si } x_0 \text{ est positif ou nul.}$$

- b. Sachant que $e^t \leq 1$, si $t \leq 0$, démontrer sans calculer $I(x_0)$ que :

$$0 \leq |I(x_0)| \leq \frac{|x_0|^3}{6}, \quad \text{si } x_0 \text{ est négatif ou nul.}$$

2. En calculant $I(x_0)$ par intégrations par parties, démontrer que l'on a :

$$e^{x_0} = 1 + x_0 + \frac{x_0^2}{2} + I(x_0).$$

Partie 2

On note f la fonction numérique de la variable réelle, définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. Démontrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et préciser son nombre dérivé en 0. (On utilisera les résultats de la partie 1).
Démontrer que f' , fonction dérivée de f , est continue sur \mathbb{R} .
2. Étudier les variations de f sur \mathbb{R} (on pourra étudier le signe de la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = xe^x - e^x + 1$).
En déduire que $f(x)$ est toujours strictement positif.
3. Tracer la courbe représentative de f dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie 3

1. Démontrer que pour tout x réel non nul, on a :
 $xf(x) > x$ et $xe^x > xf(x)$.
En déduire qu'il existe un unique réel y , compris strictement entre 0 et x tel que : $f(x) = e^y$ si x est différent de zéro.
2. On définit ainsi une application h de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que

$$\begin{cases} h(0) = 0 \\ h(x) = y & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Démontrer que h est dérivable sur \mathbb{R} et étudier ses variations (on ne demande pas de représentation graphique).

3. Démontrer que, pour tout x réel non nul, on peut trouver un réel θ et un seul, compris strictement entre 0 et 1, tel que :

$$e^x = 1 + xe^{x\theta}.$$

Vérifier que $\theta = \frac{1}{x} \log[f(x)]$.

4. Soit $\hat{\theta}$ l'application de \mathbb{R}^* dans \mathbb{R} définie par :

$$\hat{\theta}(x) = \frac{1}{x} \log[f(x)].$$

En remarquant que $\log[f(0)] = 0$, trouver la limite de $\hat{\theta}$ lorsque x tend vers 0.