∽ Baccalauréat C Dijon juin 1981 ∾

EXERCICE 1 **3 POINTS**

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x telle que

$$g(x) = x+1+\frac{3}{2x}+\frac{1}{2}\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right|.$$

1. Étudier l'ensemble de définition et les variations de la fonction g.
   On désigne par Λ la courbe représentative de g dans un repère orthogonal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ du plan. (On prendra 3 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.)
2. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x+1$ est asymptote à la courbe Λ. Montrer que Λ admet un centre de symétrie dont on précisera les coordonnées dans le repère.
3. Construire Λ.

EXERCICE 2 **3 POINTS**

1. Montrer que si deux nombres entiers naturels x et y sont premiers entre eux, il en est de même pour les entiers $2x+y$ et $5x+2y$.
2. Déterminer dans $\mathbb{N}^{\star}$ les entiers a et b vérifiant

   $$\left\{\begin{array}{lcl}(2a+b)(5a+2b) & = & 1\,620\\ ab & = & 3M\end{array}\right.$$

   M étant le plus petit commun multiple de a et de b.

PROBLÈME **14 POINTS**

Partie A

E désigne un plan vectoriel euclidien. Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sera noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$.
Dans tout le problème, $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ sont deux vecteurs tels que :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_1} & = & 1\\ \overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_2} & = & 1\\ \overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2} & = & \cos\theta,\text{ où } \theta \text{ est un réel appartenant à } \left]0~;~\frac{\pi}{2}\right]\end{array}\right.$$

1. Montrer que $\left(\overrightarrow{e_1},~\overrightarrow{e_2}\right)$ est une base de E.
   $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ étant des vecteurs de coordonnées respectives $(\alpha~;~\beta)$ et $(\alpha'~;~\beta')$ dans cette base, exprimer $\vec{u}\cdot\overrightarrow{u'}$ en fonction de ces coordonnées et de θ.
2. On note :

   $$\vec{\imath} = \frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}\left(\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}\right),\quad \vec{\jmath} = \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\left(-\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}\right).$$

   Démontrer que $\left(\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ est une base orthonormée de E.
   Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ dans la base $\left(\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

3. Soit f l'application de E dans E définie par :

$$\forall \overrightarrow{u} \in \text{E},\ f\left(\overrightarrow{u}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{e_1}\right)\cdot\overrightarrow{e_1} + \left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{e_2}\right)\cdot\overrightarrow{e_2}\right]$$

Démontrer que f est un automorphisme de E et déterminer la matrice de f dans la base ($\left(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j}\right)$.

Partie B

$\mathscr{P}$ désigne un plan affine euclidien associé à E. Soit O un point de $\mathscr{P}$. D_1 est la droite affine passant par O et de vecteur directeur $\overrightarrow{e_1}$, D_2 est la droite affine passant par O et de vecteur directeur $\overrightarrow{e_2}$.
Pour tout point M de $\mathscr{P}$, on appelle :
M_1 la projection orthogonale de M sur D_1 ;
M_2 la projection orthogonale de M sur D_2.
Dans toute la suite du problème, M' désigne le milieu de $(M_1,\ M_2)$.

1. **a.** Démontrer que :

$$\overrightarrow{\text{O}M_1} = \left(\overrightarrow{\text{O}M}\cdot\overrightarrow{e_1}\right)\overrightarrow{e_1} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{O}M_2} = \left(\overrightarrow{\text{O}M}\cdot\overrightarrow{e_2}\right)\overrightarrow{e_2}.$$

b. Démontrer que l'application $\begin{array}{rccl} g : & \mathscr{P} & \to & \mathscr{P} \\ & M & \longmapsto & g(M) = M' \end{array}$ est une bijection affine dont f est l'automorphisme associé.

Exprimer les coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ de M' dans le repère $\left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ en fonction des coordonnées $(x\ ;\ y)$ de M dans le même repère.

c. Préciser la nature des points invariants de g.

2. Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 1. Déterminer l'image (C') de (C) par l'application g. Comment faut-il choisir θ pour que (C') soit un cercle? Dans le cas contraire, préciser les coordonnées des foyers de (C') ainsi que son excentricité.

Partie C

Soit λ un réel strictement positif. Comment faut-il choisir λ pour qu'il existe des points M de $\mathscr{P} - \{O\}$ tels que :

$$\left\|\overrightarrow{\text{O}M'}\right\| = \lambda\left\|\overrightarrow{\text{O}M}\right\|?$$

(On pourra ramener ce problème à l'étude d'une équation de la forme $ax^2 + by^2 = 0$ où a et b sont des nombres dépendants de λ et θ.)
En déduire que :

$$\forall M \in \mathscr{P} - \{O\} : \quad \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \leqslant \frac{\left\|\overrightarrow{\text{O}M'}\right\|}{\left\|\overrightarrow{\text{O}M}\right\|} \leqslant \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Partie D

1. Soit φ l'application de E × E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall \left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right) \in \text{E}\times\text{E} : \quad \varphi\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{u}\cdot f\left(\overrightarrow{v}\right).$$

Démontrer que φ est un produit scalaire sur E.

2. Démontrer que :
quels que soient les points A et M de $\mathscr{P}$, d'images respectives A$'$ et M' par g, on a :

a. $\overrightarrow{\text{O}M'} \cdot \overrightarrow{\text{OA}} = \overrightarrow{\text{O}M} \cdot \overrightarrow{\text{OA}'}$

b. $\overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{\text{OA}} = \overrightarrow{\text{AA}'} \cdot \overrightarrow{\text{O}M}$.

3. Soit Δ une droite vectorielle de E. Quel est l'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ tels que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ soit orthogonal à Δ ? (On pourra utiliser D 2. b.).