**Durée : 4 heures**

# Baccalauréat C juin 1982 Dijon

**EXERCICE 1** **4 points**

$n$ étant un entier naturel fixé, on considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation

$$(\mathrm{E}_n) : \quad 165x - 132y = n.$$

Résoudre cette équation dans les trois cas particuliers :

1. $n = 33$.
2. $n = 66$.
3. $n = 42$.
   Dans ces différents cas, on déterminera pour chaque couple $(x,\ y)$ solution, le PGCD de $x$ et $y$.

**EXERCICE 2** **4 points**

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien, $\left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$ un repère orthonormé, $f$ l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe

$$z' = z^2 + \mathrm{i}z + 1.$$

1. Déterminer l'ensemble des points $M$ dont l'image par $f$ est le point A d'affixe 3i.
2. Soit $M$ un point de $\mathscr{E}$ de coordonnées $x$ et $y$ et $M' = f(M)$ de coordonnées $x'$ et $y'$ son image par $f$. Déterminer $x'$ et $y'$ en fonction de $x$ et $y$.
3. Soit $\Gamma$ l'ensemble des points $M$ du plan dont l'image est sur la droite d'équation $x = -1$.
   Déterminer une équation cartésienne de $\Gamma$.
4. Soit $\mathscr{C}$ l'image'par $f$ de la droite $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{e_1}\right)$. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{C}$.
5. Montrer que $\Gamma$ et $\mathscr{C}$ sont des coniques dont on déterminera les éléments remarquables (notamment le centre, les axes, les asymptotes et les sommets lorsqu'ils existent) et que l'on construira.

**PROBLÈME** **12 points**

Soit $\mathscr{E}$ un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$. Soit $\mathscr{C}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions numériques définies et continues sur $\mathbb{R}$. On rappelle que $\mathscr{C}(\mathbb{R})$ muni de l'addition et de la multiplication par un réel habituelles, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
*Question préliminaire* : Justifier, pour tout $f$ élément de $\mathscr{C}(\mathbb{R})$ et pour tout réel $x$, l'existence du réel $\displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$. On note $F(x)$ ce réel; on construit ainsi une fonction numérique $F$ définie sur $\mathbb{R}$, associée à $f$.

## Partie A

Soit $\mathscr{V}$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbb{R})$ engendré par les fonctions $f_1$, $f_2$ et $f_3$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = 1 \quad f_2(x) = x\ ; \quad f_3(x) = \mathrm{e}^x.$$

1. Montrer que $\mathscr{B} = \left(f_1,\ f_2,\ f_3\right)$ est une base de $\mathscr{V}$.
2. Montrer que, si $f$ est élément de $\mathscr{V}$, $F$ est élément de $\mathscr{V}$.
Soit alors $\Phi : \mathscr{V} \to \mathscr{V}$ l'application définie par

$$\Phi(f) = F.$$

Montrer que $\Phi$ est un endomorphisme de $\mathscr{V}$, et donner l'expression des coordonnées $a_1$, $b_1$ et $c_1$ de F dans la base $\mathscr{B}$ en fonction des coordonnées $a$, $b$ et $c$ de $f$ dans cette même base.
Application : On pose $f = -f_1 - f_2 + f_3$. Déterminer $\Phi(f)$.
3. Soit P le plan vectoriel engendré par $f_1$ et $f_2$ et D la droite vectorielle engendrée par $f_3$.
   **a.** Montrer que ces deux sous-espaces de $\mathscr{V}$ sont stables par $\Phi$, c'est-à-dire que $\Phi(\mathrm{P}) \subset \mathrm{P}$ et $\Phi(\mathrm{D}) \subset \mathrm{D}$.
   **b.** On définit $\Phi^1 = \Phi$' et pour tout entier $n \geqslant 2$, $\Phi^n = \Phi^{n-1} \circ \Phi$.
   Soit $f$ un élément de $\mathscr{V}$, de coordonnées $a,\ b$ et $c$ dans la base $\mathscr{B}$, et $a_n$, $b_n$, $c_n$ les coordonnées de $\Phi^n(f)$ dans cette même base.
   Déterminer $a_n,\ b_n$ et $c_n$ en fonction de $a,\ b$ et $c$.

**Partie B**

Soit $f$ et $F$ les fonctions numériques définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{array}{rcl} f(x) & = & \mathrm{e}^x - x - 1 \\ F(x) & = & (\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^x - x - 2 \end{array}$$

1. Montrer que $F$ est la fonction associée à $f$ (au sens de la question préliminaire).
2. Étudier les fonctions $f$ et $F$ et construire leurs représentations graphiques respectives $\gamma$ et $\Gamma$ dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ du plan . (Tracer les deux courbes sur le même dessin).
3. Justifier l'existence, pour tout réel positif $x$, d'un réel unique $c$ de l'intervalle $[x\,;\ x+1]$ tel que

$$\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t = f(c).$$

4. On définit la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = f\left(c_n\right)$$

puis la suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\delta_n = c_n - n$.
   **a.** Montrer que la suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   **b.** En utilisant les courbes $\gamma$ et $\Gamma$ du B 2., déterminer graphiquement les points $\mathrm{M}_0$, $\mathrm{M}_1$ et $\mathrm{M}_2$ de l'axe $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath}\right)$ d'abscisse respective $c_0$, $c_{1,\,c_2}$.
   **c.** Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{e} - 1 - \frac{1}{2\mathrm{e}^n} = \mathrm{e}^{\delta_n} - \frac{\delta_n}{\mathrm{e}^n}.$$

   **d.** Montrer que la suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell$ que l'on déterminera.
   **e.** Calculer $F(x) - f(x+\ell)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   En déduire une transformation affine T du plan $\mathscr{E}$ telle que l'on ait $\mathrm{T}(\gamma) = \Gamma$. Quelle est la nature de T?

Les parties A et B pourront être abordées indépendamment l'une de l'autre. (e désignera dans tout le problème la base des logarithmes népériens).