Durée : 4 heures

Baccalauréat C septembre 1974 Dijon

EXERCICE 1

On désigne par J et $\overline{\text{J}}$ les racines cubiques de l'unité autres que 1.

$$\text{J} = \cos\frac{2\pi}{3} + \text{i}\sin\frac{2\pi}{3}.$$

1. Vérifier que si z est un nombre complexe

$$\varphi(z) = (Z - \text{J})\left(Z - \overline{\text{J}}\right) = 1 + z + z^2.$$

2. On désigne par M l'affixe de z dans le plan complexe $\mathcal{Q}$. Déterminer et construire les ensembles suivants :

   a. E ensemble des points M de $\mathcal{Q}$ tels que $\varphi(z)$ soit réel ;

   b. F ensemble des points M de $\mathcal{Q}$ tels que $\varphi(z)$ soit imaginaire pur.

   Déterminer l'ensemble $E \cap F$. Justifier le résultat obtenu.

EXERCICE 2

On considère la fonction $f : R \to R$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2\text{e}^{x+1}.$$

où e désigne la base des logarithmes népériens.

1. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$ on prendra $\left\|\overrightarrow{\imath}\right\| = \left\|\overrightarrow{\jmath}\right\| = 3$ cm.
2. Calculer l'aire du domaine plan défini par

$$\left\{\begin{array}{lclcl} -2 & \leqslant & x & \leqslant & 0\\ 0 & \leqslant & y & \leqslant & f(x)\end{array}\right.$$

PROBLÈME

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 2, rapporté à une base $\left(\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$. On rappelle que l'ensemble $\mathcal{L}$(E) des applications linéaires de E dans lui-même (ou endomorphismes de E) peut être muni des lois de composition suivantes :

$$\begin{array}{lclcl} f+g : & \overrightarrow{u} & \longmapsto & f\left(\overrightarrow{u}\right) + g\left(\overrightarrow{u}\right)\\ \lambda,\, f & \overrightarrow{u} & \longmapsto & \lambda f\left(\overrightarrow{u}\right)\\ f \circ g : & \overrightarrow{u} & \longmapsto & f\left[g\left(\overrightarrow{u}\right)\right]\end{array}$$

où λ est un réel et f, g appartiennent à $\mathcal{L}$(E).
Alors $(\mathcal{L}(E),~+,~\circ)$ est un anneau unitaire et $(\mathcal{L}(E),~+,~\cdot)$ est un espace vectoriel réel.
On note e l'application identique de E, de matrice $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et f_0 l'application nulle, de matrice $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

1. On considère deux éléments f_1 et f_2 de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ de matrice respective

$$A_1 = \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & -1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

dans la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.

a. Calculer $f_1 \circ f_1 = f_1^2$ et $f_2 \circ f_2 = f_2^2$.

b. Démontrer que le noyau de f_1 noté Ker f_1 et l'ensemble $f_1(\mathrm{E})$ noté également Im f_1 sont égaux.

c. Démontrer que f_2 admet un endomorphisme réciproque et le déterminer.

2. Soit α un réel positif ou nul donné. On appelle S_α l'ensemble des endomorphismes de E, solutions de l'équation

$$(1) \qquad f^2 = -\alpha \mathrm{e}.$$

a. Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme f, de matrice $\begin{pmatrix}a & c\\b & d\end{pmatrix}$ dans la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, soit solution de (1) est que l'on ait

$$\left\{\begin{array}{lcl} a+d & = & 0\\ a^2+bc & = & -\alpha\end{array}\right.$$

b. On suppose α positif non nul. Démontrer que tout élément f de S_α est une bijection et déterminer son application réciproque f^{-1}. Peut-on déterminer α pour que f^{-1} soit un élément de S_α ?

Démontrer que, pour tout élément f de S_α et pour tout élément $\overrightarrow{u}$ non nul de E, la famille $\left(\overrightarrow{u}, f\left(\overrightarrow{u}\right)\right)$ est une famille libre.

c. On suppose α nul ; f étant un élément de S_{O} comparer Ker f et Im f.

Discuter.

$\overrightarrow{u}$ étant un vecteur non nul de E, f un endomorphisme distinct de f_0 étudier l'indépendance linéaire de la famille $\left(\overrightarrow{u}, f\left(\overrightarrow{u}\right)\right)$.

3. On suppose de nouveau α positif ou nul. Soit f un élément fixé de S_α distinct de f_0 si f_0 est élément de S_α. On considère l'ensemble

$$\mathscr{F} = \left\{g = xe + yf, \quad (x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

a. Démontrer que la famille $(e\,;\,f)$ est une famille libre de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$. En déduire que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.

b. Soit φ l'application de $\mathscr{F}$ dans $\mathbb{C}$, ensemble des nombres complexes muni de sa structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall g \in \mathscr{F}, \quad \varphi(g) = x + \mathrm{i}y$$

Démontrer que φ est une transformation linéaire.