

## Baccalauréat C Dijon septembre 1976

### EXERCICE 1

1. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Soit  $P$  un plan affine rapporté à un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . On note  $J$  l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n-1\}$  des  $n$  premiers entiers naturels non nuls. On appelle  $M_{(m; p)}$  le point de coordonnées  $(m; p)$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ,  $(m; p)$  appartenant à  $J \times J$ . On affecte chaque point  $M_{(m; p)}$  du coefficient  $m$ ; on note  $(M_{(m; p)}, m)$  le point pondéré obtenu.

- a. Déterminer, dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  les coordonnées du barycentre  $G_1$  du système  $\{(M_{(1; p)}, 1); p \in J\}$ , obtenu pour  $m = 1$ .

Déterminer, dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , les coordonnées du barycentre  $G_{m_0}$  du système  $\{(M_{(1; p)}, 1); p \in J\}$ , obtenu pour  $m = m_0$ .

- b. En déduire les coordonnées du barycentre  $G$  du système

$$\{(M_{(m; p)}, m); (m; p) \in J \times J\}.$$

- c. Quel est l'ensemble des valeurs de  $n$  pour lesquelles les coordonnées de  $G$  sont entières?

### EXERCICE 2

Soit  $P$  un plan affine euclidien, rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ . À tout point  $M$  de coordonnées  $(x; y)$  on fait correspondre son affixe  $z = x + iy$ , où  $i$  est un nombre complexe tel que  $i^2 = -1$ .

On appelle  $s$  la suite, application de  $\mathbb{N}$ , ensemble des entiers naturels, dans  $\mathbb{C}$  ensemble des nombres complexes, définie par :

$$\begin{cases} z_0 & = & 0 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) & z_{n+1} & = & \frac{1}{2}z_n + 1 \end{cases}$$

1. Montrer que  $z_n$  s'exprime comme somme des  $n$  premiers termes d'une suite géométrique. Calculer  $z_n$  en fonction de  $n$ .
2. Soit  $M_n$  l'image du nombre complexe  $z_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Par quelle transformation affine simple passe-t-on de  $M_n$  à  $M_{n+1}$ ?
3. Soit  $A$  le point de coordonnées  $(\frac{4}{5}; \frac{2}{5})$ . Calculer en fonction de  $n$  la norme du vecteur  $\overrightarrow{AM_n}$ . Trouver la limite de cette norme quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .  
Représenter les points  $A, M_0, M_1, M_2, M_3, M_4$  dans le repère  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .

### PROBLÈME

#### Partie A

Soient  $f$  et  $g$  les fonctions numériques de la variable réelle  $t$  définie par :

$$f(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad g(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

$e$  étant la base des logarithmes népériens.

1. Étudier les variations de la fonction  $g$ .  
Étudier les variations de la fonction  $f$ .  
Tracer les courbes représentatives dans un même repère orthonormé.
2. Démontrer que  $g$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$  et déterminer  $g^{-1}$ , fonction réciproque de  $g$ .
3. Établir les identités suivantes :

$$(\forall t \in \mathbb{R}), \quad f^2(t) - g^2(t) = 1 \quad \text{où} \quad f^2(t) = f(t) \times f(t)$$

$$(\forall t \in \mathbb{R})(\forall t' \in \mathbb{R}), \quad f(t) \times f(t') + g(t) \times g(t') = f(t + t')$$

$$(\forall t \in \mathbb{R})(\forall t' \in \mathbb{R}), \quad g(t) \times f(t') + f(t) \times g(t') = g(t + t')$$

### Partie B

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien de dimension 2 et  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$  une base orthonormée de  $E$ . On note  $\mathcal{L}(E)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans lui-même (endomorphismes de  $E$ ). On note  $GL(E)$  l'ensemble des applications linéaires bijectives de  $E$  sur lui-même (transformations linéaires de  $E$  ou automorphismes de  $E$ ).

On appelle  $\psi$  l'application de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$(\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E \times E) \quad (\psi(\vec{u}, \vec{v}) = 4xx' - yy')$$

$(x; y)$  et  $(x'; y')$  étant les coordonnées de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

On définit l'application  $N$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$(\forall \vec{u} \in E) \quad (N(\vec{u}) = \psi(\vec{u}, \vec{u})).$$

On note  $\varphi_{a,b}$  l'endomorphisme de  $E$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que  $\psi$  est une application bilinéaire symétrique. Quel est l'ensemble des vecteurs  $\vec{u}$  tels que  $N(\vec{u}) = 0$ ?  
 $\psi$  est-il un produit scalaire sur  $E$ ?
2. On dit que  $\varphi_{a,b}$  conserve  $N$  si et seulement si

$$(\forall \vec{u} \in E) \quad (N(\varphi_{a,b}(\vec{u})) = N(\vec{u})).$$

Démontrer que  $\varphi_{a,b}$  conserve  $N$  si et seulement si  $a^2 - b^2 = 1$ .

Démontrer que l'ensemble  $\mathcal{F}$  des applications linéaires  $\varphi_{a,b}$  qui conserve  $N$  est un groupe commutatif pour la composition des applications (notée  $\circ$ ).

3. On note  $\Phi_t$  l'application  $\varphi_{f(t), g(t)}$ ,  $f$  et  $g$  étant les fonctions étudiées dans la partie A. Démontrer que  $\Phi_t$  est élément de  $\mathcal{F}$  et que l'application  $m$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathcal{F}$  définie par

$$m: t \mapsto \Phi_t$$

est un homomorphisme injectif du groupe  $(\mathbb{R}, +)$  dans le groupe  $(\mathcal{F}, \circ)$ .

Démontrer que l'ensemble  $m(\mathbb{R})$  est formé des éléments  $\varphi_{a, b}$  de  $\mathcal{F}$  pour lesquels  $a$  est strictement positif.

### Partie C

Soit P le plan affine associé à l'espace vectoriel E, rapporté au repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Soit A le point de coordonnées (1; 1) dans ce repère.

On considère le point mobile M du plan P dont la position est définie à l'instant t par :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \Phi_t(\overrightarrow{OA}).$$

1. Exprimer à l'instant  $t$  les coordonnées de M dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .
2. Démontrer que le support de la trajectoire de M est une hyperbole dont on précisera les asymptotes, les foyers, les sommets.  
Préciser la trajectoire de M quand  $t$  décrit  $\mathbb{R}$ .
3. Calculer en fonction de  $t$  les coordonnées du vecteur vitesse  $\vec{V}$  et du vecteur accélération  $\vec{\Gamma}$ . De l'étude du produit scalaire  $\vec{V} \cdot \vec{\Gamma}$ , déduire les valeurs de  $t$  pour lesquelles le mouvement est accéléré, retardé.